



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Heloise Assis Fazzolari

**Análise de Estabilidade e Controle Robustos de
Sistemas Intervalares com Parâmetros
Multi-incidentes via Análise Intervalar**

Campinas
2018

Heloise Assis Fazzolari

Análise de Estabilidade e Controle Robustos de Sistemas Intervalares com Parâmetros Multi-incidentes via Análise Intervalar

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA PELA ALUNA HELOISE ASSIS FAZZOLARI E ORIENTADA PELO PROF. DR. PAULO AUGUSTO VALENTE FERREIRA.

Campinas
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 159829/2013-5

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4113-259>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

F299a Fazzolari, Heloise Assis, 1986-
Análise de estabilidade e controle robustos de sistemas intervalares com parâmetros multi-incidentes via análise intervalar / Heloise Assis Fazzolari. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Controle robusto. 2. Estabilidade. 3. Sistemas lineares. 4. Análise de intervalos (Matemática). 5. Sistemas incertos. I. Ferreira, Paulo Augusto Valente, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Robust analysis of stability and control of interval systems and multi-incident parameters via interval analysis

Palavras-chave em inglês:

Robust control

Stability

Linear systems

Interval analysis (Mathematics)

Uncertain systems

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutora em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Paulo Augusto Valente Ferreira [Orientador]

Alfredo Del Sole Lordelo

José Reginaldo Hughes Carvalho

Gilmar Barreto

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

Data de defesa: 23-03-2018

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA — TESE DE DOUTORADO

Candidata: Heloise Assis Fazzolari

RA: 151571

Data da Defesa: 23/03/2018

Título da Dissertação/Tese: “Análise de Estabilidade e Controle Robustos de Sistemas Intervalares com Parâmetros Multi-incidentes via Análise Intervalar”

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira (presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Alfredo Del Sole Lordelo (UFABC - Universidade Federal do ABC)

Prof. Dr. José Reginaldo Hughes Carvalho (UFAM - Universidade Federal do Amazonas)

Prof. Dr. Gilmar Barreto (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica da aluna.

Dedico esta Tese ao amor da minha vida, Ródney, pelo apoio incondicional.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e saúde para enfrentar mais este desafio e me colocar perto de pessoas tão especiais.

Ao meu marido Ródney pela paciência, suporte, noites de pouco sono e apoio que me proporcionaram passar por esta jornada com mais tranquilidade.

À minha família e amigos pelo incentivo, por compreenderem minha ausência em momentos difíceis e por me permitirem traçar este caminho de maneira mais alegre.

Aos colegas de laboratório pela ajuda, companheirismo e saudável convivência.

Ao Professor Dr. Alfredo Del Sole Lordelo por ter proporcionado a oportunidade de realizar este sonho e por me apoiar e ajudar sempre.

Ao meu orientador Professor Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira por participar diretamente da minha formação científica, pelo auxílio, dedicação e compreensão durante esta jornada.

Finalmente, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo auxílio financeiro dado a este trabalho.

“Todas as vitórias ocultam uma abdicação.”
(Simone de Beauvoir)

Resumo

Esta tese apresenta uma metodologia para a análise de estabilidade e controle de sistemas dinâmicos lineares com parâmetros intervalares. A fim de reduzir o conservadorismo de soluções devido ao chamado fenômeno de dependência, presente na análise intervalar clássica, introduz-se a análise intervalar parametrizada, a qual considera a existência de parâmetros intervalares multi-incidentes. A solução apresentada é baseada em uma metodologia para solução de sistemas lineares intervalares que considera o tratamento das multi-incidências de parâmetros. Diversos aspectos relacionados à estabilidade e controle de sistemas dinâmicos lineares intervalares são considerados, como por exemplo, regularidade e positividade de matrizes intervalares. A análise de estabilidade de sistemas lineares intervalares é realizada através da solução da equação de Lyapunov intervalar, utilizando-se transformações a fim de obter um sistema intervalar de equações. Os resultados obtidos são comparados a métodos de solução por LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares) e métodos baseados em análise intervalar clássica. A alocação robusta de polos é obtida através da solução da equação Diofantina intervalar e os resultados obtidos são comparados com a análise intervalar clássica e com um método não intervalar recentemente proposto na literatura.

Palavras-chaves: Controle robusto; Estabilidade robusta; Análise intervalar; Sistemas lineares incertos; Sistemas intervalares; Multi-incidência de parâmetros intervalares.

Abstract

This thesis presents a methodology for stability analysis and control of linear dynamic systems with interval parameters. In order to reduce the conservativeness due to the so-called dependency phenomenon present in classical interval analysis methods, a parameterized interval analysis approach is proposed. The approach proposed is based on a solution strategy for linear interval systems that takes into account multi-incident parameters. Several aspects related to the stability and control of interval linear systems, as, for example, nonsingularity and positivity of interval matrices, are considered. The stability analysis of linear interval systems is carried out through the solution of the interval Lyapunov equation transformed into an ordinary interval system of linear equations. The results obtained are compared with LMI (Linear Matrix Inequality) and classical interval analysis methods. The robust pole placement problem is tackled by solving the interval Diophantine equation. The results obtained by the parametrized interval analysis method are compared with those of the classic interval analysis and a non-interval method recently proposed in the literature.

Keywords: Robust control; Robust stability; Interval analysis; Uncertain linear systems; Interval Systems; Multi-incident interval parameters.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Circuito Elétrico	43
Figura 2 – Sistema massa-mola-atrito.	57
Figura 3 – Sistema de controle com realimentação unitária.	64
Figura 4 – Espectros de malha fechada gerados pelos controladores.	68
Figura 5 – Espectros de malha fechada dos controladores.	73
Figura 6 – Conjunto das incertezas p_1 e p_2 , consideradas em Cerone <i>et al.</i> (2015).	74
Figura 7 – Conjunto das incertezas p_3 e p_4 , consideradas em Cerone <i>et al.</i> (2015).	74
Figura 8 – Conjunto das incertezas p_1 e p_2 intervalares.	75
Figura 9 – Conjunto das incertezas p_3 e p_4 intervalares.	75
Figura 10 – Espectros de malha fechada dos controladores.	78
Figura 11 – Espectros de malha fechada dos controladores.	78

Lista de tabelas

Tabela 1	– Soluções de P_z	34
Tabela 2	– Valores Nominais dos Resistores	44
Tabela 3	– Caso $n = 3$	52
Tabela 4	– Máximos Raios de Incerteza	57
Tabela 5	– Variação do número de parâmetros intervalares	59
Tabela 6	– Resultados Sistema Massa-mola	62

Lista de símbolos

$a := b$	a é definido por b
$a =: b$	b é definido por a
$\diamond\{A\}$	Casca intervalar de A (menor intervalo que contém A).
\emptyset	Conjunto vazio
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores reais de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
\mathbb{IR}	Conjunto dos intervalos reais fechados
\mathbb{IR}^n	Conjunto dos vetores intervalares de dimensão n
$\mathbb{IR}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes intervalares de dimensão $n \times m$
a	Escalar
$[a] = a^-, a^+$	Intervalo fechado
a^-	Limitante inferior de $[a]$
a^+	Limitante superior de $[a]$
a_w	Largura de $[a]$
a_c	Ponto central de $[a]$
δ	Raio de $[a]$
$ [a] $	Valor absoluto de $[a]$
\mathbf{a}	Vetor
\mathbf{a}^T	Transposto de \mathbf{a}
$[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+]$	Vetor intervalar
$[a_i] = [a_i^-, a_i^+]$	i -ésimo elemento de $[\mathbf{a}]$
\mathbf{a}^-	Limitante inferior de $[\mathbf{a}]$
\mathbf{a}^+	Limitante superior de $[\mathbf{a}]$

\mathbf{a}_w	Largura de $[\mathbf{a}]$
\mathbf{a}_c	Ponto central de $[\mathbf{a}]$
δ	Raio de $[\mathbf{a}]$
$ [\mathbf{a}] $	Valor absoluto de $[\mathbf{a}]$
\mathbf{A}	Matriz
\mathbf{A}^T	Transposto de \mathbf{A}
$\mathbf{0}_n$	Matriz de zeros de dimensão $n \times n$
\mathbf{I}_n	Matriz Identidade de dimensão $n \times n$
$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+]$	Matriz intervalar
$[A_{ij}] = [A_{ij}^-, A_{ij}^+]$	ij -ésimo elemento de $[\mathbf{A}]$
\mathbf{A}^-	Limitante inferior de $[\mathbf{A}]$
\mathbf{A}^+	Limitante superior de $[\mathbf{A}]$
\mathbf{A}_w	Largura de $[\mathbf{A}]$
\mathbf{A}_c	Ponto central de $[\mathbf{A}]$
Δ	Raio de $[\mathbf{A}]$
$ [\mathbf{A}] $	Valor absoluto de $[\mathbf{A}]$

Sumário

Lista de ilustrações	10
Lista de tabelas	11
Lista de abreviaturas e siglas	12
Lista de símbolos	12
Sumário	14
1 Introdução	16
2 Análise Intervalar Clássica	20
2.1 Intervalos Reais	20
2.2 Vetores Reais Intervalares	23
2.3 Matrizes Reais Intervalares	24
2.4 Equações Lineares Intervalares	26
2.5 Regularidade de Matrizes Intervalares	30
2.6 Positividade de Matrizes Intervalares	34
2.7 Pacote <i>Intlab</i>	36
2.8 Conclusão	37
3 Análise Intervalar com Tratamento de Multi-incidências de Parâmetros	38
3.1 Sistemas Lineares Intervalares	38
3.2 Tratamento de Multi-incidências	40
3.3 Conclusão	47
4 Estabilidade Robusta	48
4.1 Equação de Lyapunov Intervalar	48
4.2 Tratamento de Multi-incidências	48
4.2.1 Transformação com produto de Kronecker	49
4.2.2 Transformação com método proposto por Bingulac (1970)	50
4.3 Estabilidade Robusta com LMIs	53
4.4 Equação de Lyapunov Intervalar Discreta	60
4.4.1 Produto de Kronecker	60
4.4.2 Método de Euler	61
4.5 Tratamento de Multi-incidências	61
4.6 Conclusão	63
5 Controle por Alocação de Polos	64
5.1 Equação Diofantina Intervalar	64
5.2 Regularidade da Resultante de Sylvester	66
5.3 Solução da Equação Diofantina Intervalar	67
5.4 Projeto de Controladores Robustos	69

5.4.1	Programação Alvo na Alocação Robusta de Polos	76
5.5	Conclusão	79
6	Conclusão Geral	80
	Referências	82

1 Introdução

Os problemas de analisar a estabilidade de um sistema linear e invariante no tempo e de projetar um controlador dinâmico de forma a restringir os coeficientes do polinômio característico do sistema em malha fechada a uma região pré-determinada do plano complexo s são importantes no contexto de controle clássico (CHEN, 1999), (ROTSTEIN *et al.*, 1991). Um controlador robusto deve alocar os polos de malha fechada em uma região particular do semi-plano esquerdo do plano s considerando as incertezas no modelo matemático do sistema, quase sempre presentes em problemas reais.

Existem três abordagens principais para o tratamento de incertezas. A primeira, probabilística, trata parâmetros incertos como variáveis aleatórias. É uma abordagem muito utilizada, mas seus resultados são confiáveis somente quando há dados experimentais suficientes para definir funções de densidade de probabilidade para as incertezas, e, em alguns casos, é necessário analisar sistemas incertos sem dispor de uma grande quantidade de dados (ELISHAKOFF; OHSAKI, 2010). Além disso, até mesmo pequenos desvios dos valores reais podem levar a erros relativamente grandes (YAKOV; ELISHAVOK, 2003). A segunda abordagem é baseada em conjuntos nebulosos e introduz o conceito de função de pertinência, que caracteriza o grau de pertencimento de um parâmetro a um conjunto (MOENS; VANDEPITTE, 2005), (RAO; REDDY, 2006). A terceira abordagem envolve teorias de conjuntos, como a Análise Intervalar. (MOORE, 1966), (NEUMAIER, 1990), (SHARY, 2002), (MOORE *et al.*, 2009), (RUMP, 2010). Considerando que os parâmetros incertos do sistema estão contidos em intervalos descritos por limitantes superiores e inferiores. Esta abordagem é atraente, pois pode fornecer soluções analiticamente precisas.

Entretanto, a aplicação de métodos de análise intervalar a problemas reais de engenharia pode levar à superestimação de conjuntos-solução devido ao chamado *fenômeno de dependência* (MUHANNA; MULLEN, 2001), que ocorre quando uma expressão contém múltiplas incidências de um ou mais parâmetros intervalares. Diversas soluções foram propostas para resolver o problema da multi-incidência de parâmetros intervalares, como a Análise Intervalar Generalizada (HANSEN, 1975) e a Aritmética Afim (COMBA; STOLFI, 1993), (STOLFI; FIGUEIREDO, 2003), com aplicações em áreas diversas, como em análise estrutural estática (SANTORO *et al.*, 2015), mecânica aplicada (LIU *et al.*, 2015), confiabilidade de sistemas (SOLTANI *et al.*, 2015), sistemas elétricos e mecânicos (EL-OWNY, 2014).

Em Pereira e Costa (2014), a análise intervalar é utilizada para realizar cálculos de fluxo de potência em sistemas elétricos. Esta análise, entretanto, não considera o problema das multi-incidências. Em Lordelo e Ferreira (2006) o problema de projetar

um controlador robusto foi resolvido utilizando técnicas de Análise Intervalar, através de equações Diofantinas intervalares, sem considerar o problema da dependência de parâmetros intervalares.

Algumas técnicas têm sido propostas para lidar com o problema de alocação robusta de polinômios característicos para plantas incertas com parâmetros multi-incidentes. Em Sadeghzadeh (2011), condições suficientes para o projeto robusto do controlador por realimentação de saída, para sistemas com incerteza paramétrica elipsoidal, são dadas em termos de soluções para um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs). Em Cerone *et al.* (2015), o problema da alocação robusta de polos é tratado considerando-se que os parâmetros da planta estão contidos em regiões semi-algébricas não convexas. Em Chen *et al.* (2016) um controlador robusto por realimentação de saída é proposto para sistemas contínuos no tempo com incertezas intervalares utilizando desigualdades lineares.

Uma importante área de estudo em Engenharia é a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos baseada na resolução de equações de Lyapunov. Para sistemas lineares incertos, representados no espaço de estados por matrizes intervalares, isto é, matrizes cujos elementos pertencem a intervalos reais, o estudo de estabilidade pode ser realizado através da solução de equações de Lyapunov intervalares. A partir da análise de matrizes simétricas contidas na solução da equação de Lyapunov intervalar, pode-se inferir sobre a estabilidade do sistema incerto. Se todas as matrizes contidas na solução da equação de Lyapunov Intervalar forem definidas positivas, então, o sistema será assintoticamente estável, pois todos os seus autovalores possuirão parte real negativa. Gahinet *et al.* (1996) realiza a análise de sistemas incertos parametrizados. Em Leng e Zhang (2013) é apresentado um algoritmo iterativo para realizar a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos intervalares.

Esta Tese propõe uma metodologia de análise de estabilidade de sistemas dinâmicos lineares intervalares que considera a solução de equações intervalares com parâmetros multi-incidentes baseada em Rump (1994) e Lordelo e Ferreira (2006), o que reduz o conservadorismo das soluções.

Esta metodologia de análise de estabilidade envolve a solução da Equação de Lyapunov com parâmetros intervalares multi-incidentes para sistemas lineares contínuos e discretos no tempo. Comparações entre a abordagem intervalar proposta e abordagens que utilizam LMIs são apresentadas. A primeira delas é a chamada Estabilidade Quadrática, através da qual garante-se a estabilidade de um sistema incerto pela existência de uma única matriz de Lyapunov que é independente de parâmetros. A segunda supõe a existência de matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros de maneira afim. A metodologia proposta nesta Tese permite, em alguns casos, obter soluções melhores do que as produzidas pela estabilidade quadrática quando não é possível utilizar a abordagem de dependência afim de parâmetros. Uma terceira abordagem também considera a existência de matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros de maneira afim (OLIVEIRA; PERES,

2005).

Propõe-se ainda que a metodologia baseada na solução de equações intervalares com parâmetros multi-incidentes seja utilizada para realizar o controle de sistemas dinâmicos lineares através da alocação robusta de polos. Objetiva-se resolver a equação Diofantina intervalar para obter um controlador intervalar robusto. Além disso, apresenta-se também uma abordagem baseada em otimização binível, através da qual é possível obter um único controlador viável e ótimo. São realizadas comparações com métodos baseados em programação semi definida e programação alvo.

A Tese está organizada como segue. O Capítulo 2 apresenta definições e resultados de análise intervalar clássica. O objetivo é introduzir noções suficientes para o entendimento dos métodos apresentados nos capítulos seguintes. Especial atenção é dedicada à caracterização de matrizes intervalares não singulares (regulares). A tese estabelece um novo resultado relacionado a uma condição necessária e suficiente para regularidade de matrizes intervalares. O Capítulo 3 reúne resultados sobre análise intervalar com tratamento de multi-incidências de parâmetros em sistemas de equações lineares intervalares. Os resultados do Capítulo 3 são essenciais para os capítulos restantes.

No Capítulo 4, apresenta-se a teoria relacionada à análise de sistemas dinâmicos lineares intervalares e propõe-se uma abordagem para o tratamento das multi-incidências dos parâmetros. Exemplos ilustrativos e comparações entre a abordagem proposta e abordagens envolvendo LMIs, considerando-se os casos contínuo e discreto no tempo, são apresentadas. A equação de Lyapunov intervalar pode ser reduzida a um sistema de equações lineares intervalares através de dois métodos (SEIF *et al.*, 1994), (BINGULAC, 1970). O sistema equivalente permite implementar o método descrito em Rump (1994), que considera multi-incidências de parâmetros, com uma consequente redução do conservadorismo da análise.

O Capítulo 5 apresenta a técnica de alocação de polos e sua caracterização através da equação Diofantina. Em seguida, apresenta-se uma análise da não singularidade robusta da resultante de Sylvester intervalar associada a dois polinômios intervalares. O problema da coprimo-robustez de polinômios intervalares também é considerado. Um método computacional para o projeto de controladores por alocação robusta de polos na presença de incertezas do tipo intervalar com o tratamento de multi-incidências é proposto. O projeto de controladores robustos é obtido na forma de um controlador intervalar, ou seja, um controlador com coeficientes intervalares que contém todas as possíveis soluções do problema de alocação de polos. Uma comparação com métodos clássicos de análise intervalar é realizada.

O Capítulo 5 também é dedicado à caracterização, análise e projeto de controladores robustos como soluções internas de equações Diofantinas intervalares. É apresentada uma abordagem computacional, baseada em otimização, para o problema de projeto

de controladores não frágeis, formulado como um problema de centralização. O Capítulo 6 traz as conclusões gerais e propostas de trabalhos futuros.

2 Análise Intervalar Clássica

Este Capítulo 2 apresenta definições relativas a conjuntos intervalares e a *aritmética e álgebra intervalares*. Objetiva-se introduzir noções suficientes para o entendimento do conteúdo apresentado nos capítulos seguintes. Para maiores detalhes, ver (MOORE, 1966), (MOORE, 1979), (ALEFELD; HERZBERGER, 1983), (ROHN, 1989) e (JAULIN *et al.*, 2001).

2.1 Intervalos Reais

Intervalos são uma extensão da classe dos números reais. O conjunto dos números reais é denotado por \mathbb{R} e os elementos de \mathbb{R} por letras minúsculas a, b, c, \dots, x, y, z . Um subconjunto conexo de \mathbb{R} , representado como $[a]$

$$[a] := [a^-, a^+] := \{x : a^- \leq x \leq a^+\}$$

é chamado de *intervalo real* ou *intervalo*. O *limitante inferior* a^- e o *limitante superior* a^+ de $[a]$ são definidos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} a^- &:= \sup\{x \in \{\mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]\} : x \leq a, a \in [a]\}, \\ a^+ &:= \inf\{y \in \{\mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]\} : a \leq y, a \in [a]\}, \end{aligned}$$

O conjunto de todos os intervalos reais fechados é representado por \mathbb{IR} e os elementos de \mathbb{IR} por letras minúsculas entre colchetes $[a], [b], [c], \dots, [x], [y], [z]$. A seguir, são apresentadas algumas definições sobre análise intervalar envolvendo intervalos fechados.

Definição 2.1.1. *Dois intervalos $[a] = [a^-, a^+]$ e $[b] = [b^-, b^+]$ em \mathbb{IR} são iguais, ou seja, $[a] = [b]$, se e somente se, $a^- = b^-$ e $a^+ = b^+$.*

Definição 2.1.2. *A largura a_w , o ponto central a_c , o raio δ e o valor absoluto de qualquer intervalo limitado e não vazio $[a] = [a^-, a^+] \in \mathbb{IR}$ são definidos, respectivamente, por*

$$a_w := a^+ - a^-, \quad a_c := \frac{a^- + a^+}{2}, \quad \delta := \frac{a^+ - a^-}{2} \quad \text{e} \quad |[a]| := \max\{|a^-|, |a^+|\}.$$

Definição 2.1.3. *Considere $\diamond \in \{+, -, \cdot, /\}$ uma operação binária em \mathbb{R} . Se $[a], [b] \in \mathbb{IR}$, então a operação binária correspondente em \mathbb{IR} é definida por*

$$[a] \diamond [b] := [\{a \diamond b : a \in [a] \text{ e } b \in [b]\}].$$

Os símbolos utilizados para as operações em \mathbb{R} e \mathbb{IR} são os mesmos. Isto não deve gerar confusão, pois sempre ficará claro a partir do contexto se a operação é em \mathbb{R} ou em \mathbb{IR} .

Para intervalos fechados não vazios, as operações sobre os intervalos $[a] = [a^-, a^+]$ e $[b] = [b^-, b^+]$ são calculadas explicitamente em termos dos seus extremos. Isto ocorre pois $z = f(x, y)$, na qual $f(x, y) = x \diamond y$, com $\diamond \in \{+, -, \cdot, /\}$ é uma função contínua sobre um conjunto compacto. Então, a função $f(x, y)$ fornece o maior e menor valor da operação, assim como todos os valores intermediários:

$$\begin{aligned}
[a] \cdot [b] &:= [\min\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+\}, \max\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+\}], \\
[a] + [b] &:= [a^- + b^-, a^+ + b^+], \\
[a] - [b] &:= [a^- - b^+, a^+ - b^-] = [a] + [-1, -1] \cdot [b], \\
\alpha \cdot [a] &:= [\alpha \cdot a^-, \alpha \cdot a^+] \quad \text{se } \alpha \geq 0, \\
&:= [\alpha \cdot a^+, \alpha \cdot a^-] \quad \text{se } \alpha < 0, \\
[a]/[b] &:= [a] \cdot (1/[b]), \\
1/[b] &:= \emptyset \quad \text{se } [b] = [0, 0], \\
&:= [1/b^+, 1/b^-] \quad \text{se } 0 \notin [b], \\
&:= [1/b^+, \infty[\quad \text{se } b^- = 0 \text{ e } b^+ > 0, \\
&:=] - \infty, 1/b^-] \quad \text{se } b^- < 0 \text{ e } b^+ = 0, \\
&:=] - \infty, \infty[\quad \text{se } b^- < 0 \text{ e } b^+ > 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

A operação $[a] \diamond [b]$ gera um intervalo real fechado e as expressões em (2.1) fornecem o menor e o maior valor de $f(x, y)$, com \mathbb{IR} fechado para estas operações. Quando aplicadas a intervalos degenerados $[a]$ e $[b]$, isto é, a intervalos $[a]$ tais que $a^- = a^+$, as regras descritas em (2.1) se reduzem às conhecidas operações da aritmética pontual, que é um caso particular da aritmética intervalar.

Exemplo 2.1.1. *Exemplos de tais operações em \mathbb{IR} são*

$$\begin{aligned}
([1, 2.2] \cdot [0, 2]) + [1, 3] &= [0, 4.4] + [1, 3] = [1, 7.4], \\
1/[2, 4] &= [0.25, 0.5], \\
[3, 4]/[0, 0] &= \emptyset.
\end{aligned}$$

O Teorema a seguir apresenta algumas propriedades das operações algébricas em \mathbb{IR} .

Teorema 2.1.1. *Considere os intervalos $[a]$, $[b]$ e $[c] \in \mathbb{IR}$. Então as seguintes propriedades são verdadeiras:*

- $[a] + [b] = [b] + [a]$ e $[a][b] = [b][a]$ (comutatividade);
- $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$ e $([a][b])[c] = [a]([b][c])$ (associatividade);
- $[x] = [0,0]$ e $[y] = [1,1]$ são os únicos elementos neutros para a adição e multiplicação intervalares, respectivamente, ou seja

$$[a] = [x] + [a] = [a] + [x] \text{ para todo } [a] \in \mathbb{IR}, \text{ se e somente se } [x] = [0,0];$$

$$[a] = [y][a] = [a][y] \text{ para todo } [a] \in \mathbb{IR}, \text{ se e somente se } [y] = [1,1];$$

- \mathbb{IR} não possui divisores por zero;
- Também é verificado que

$$a([b] + [c]) = a[b] + a[c], \quad a \in \mathbb{R};$$

$$[a]([b] + [c]) = [a][b] + [a][c] \text{ se } bc \geq 0 \text{ para todo } b \in [b] \text{ e } c \in [c].$$

Prova: Veja (ALEFELD; HERZBERGER, 1983). ■

Algumas propriedades das operações básicas em \mathbb{IR} são diferentes das propriedades em \mathbb{R} . Por exemplo, $[a] - [a]$ não é necessariamente igual a $[0,0]$. Isto se deve ao fato de que $[a] - [a] = \{a - b \mid a \in [a], b \in [a]\}$ e não $\{a - a \mid a \in [a]\}$. Portanto, a subtração não leva em conta a multi-incidência de duas ocorrências em $[a]$. A adição e a multiplicação permanecem associativas e comutativas, mas a multiplicação não é mais distributiva com respeito à adição. Ao invés disso, $[a]([b] + [c]) \subset [a][b] + [a][c]$, propriedade conhecida como subdistributividade, que é uma consequência direta do efeito da multi-incidência de $[a]$, e que aparece apenas uma vez no lado esquerdo, mas duas vezes no lado direito. Portanto, é importante fatorar as formas expandidas o máximo possível.

Exemplo 2.1.2. A expressão $x^2 - x = (x - 1/2)^2 - 1/4$ não é verdadeira quando aplicada na variável $[x] \in \mathbb{IR}$. Isto é verificado para $[x] = [-1,3]$, pois

$$\begin{aligned} [x]^2 - [x] &= [-1,3]^2 - [-1,3] = [0,9] + [-3,1] = [-3,10], \\ ([x] - 1/2)^2 - 1/4 &= [-3/2, 5/2]^2 - 1/4 = [0, 25/4] - 1/4 = [-1/4, 6]. \end{aligned}$$

O primeiro resultado é uma aproximação pessimista da imagem do conjunto de $x^2 - x$ em $[-1,3]$ e o segundo é a imagem deste conjunto.

As operações com conjuntos podem ser redefinidas, no contexto de intervalos fechados, como operações envolvendo seus limites.

Definição 2.1.4. A interseção de dois intervalos $[a], [b] \in \mathbb{IR}$ é definida por

$$\begin{aligned} [a] \cap [b] &:= [\{c \in \mathbb{R} : c \in [a] \text{ e } c \in [b]\}], \\ &:= [\max\{a^-, b^-\}, \min\{a^+, b^+\}], \text{ se } \max\{a^-, b^-\} \leq \min\{a^+, b^+\}, \\ &:= \emptyset, \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

Definição 2.1.5. A casca intervalar de um subconjunto \mathcal{A} de \mathbb{R} , denotada por $[\mathcal{A}]$, é o menor intervalo em \mathbb{IR} que contém \mathcal{A} .

Definição 2.1.6. A união de dois intervalos $[a], [b] \in \mathbb{IR}$ é definida por

$$[a] \cup [b] := [\{c \in \mathbb{R} : c \in [a] \text{ ou } c \in [b]\}].$$

Como a união de dois intervalos não resulta necessariamente em um intervalo fechado, define-se a *união intervalar* como a *casca intervalar da união*.

Definição 2.1.7. A união intervalar de dois intervalos não vazios $[a], [b] \in \mathbb{IR}$, é definida por

$$[a] \sqcup [b] := [[a] \cup [b]] := [\min\{a^-, b^-\}, \max\{a^+, b^+\}].$$

2.2 Vetores Reais Intervalares

Um *vetor intervalar* \mathbf{a} é definido como o produto cartesiano de n intervalos fechados. Assim,

$$[\mathbf{a}] = [a_1] \times [a_2] \times \dots \times [a_n], \quad \text{onde} \quad [a_i] = [a_i^-, a_i^+] \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

O conjunto de todos os n -vetores intervalares reais é denotado por \mathbb{IR}^n . O *limitante inferior* \mathbf{a}^- e o *limitante superior* \mathbf{a}^+ de um vetor intervalar são vetores que consistem dos limitantes inferiores e superiores, respectivamente, dos seus componentes intervalares. Assim,

$$\mathbf{a}^- := [a_1^- \ a_2^- \ \dots \ a_n^-]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{a}^+ := [a_1^+ \ a_2^+ \ \dots \ a_n^+]^T.$$

Definição 2.2.1. Dois vetores intervalares $\mathbf{a} = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+]$ e $\mathbf{b} = [\mathbf{b}^-, \mathbf{b}^+] \in \mathbb{IR}^n$, são iguais, ou seja, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, se e somente se, $\mathbf{a}^- = \mathbf{b}^-$ e $\mathbf{a}^+ = \mathbf{b}^+$.

Definição 2.2.2. A largura \mathbf{a}_w , o ponto central \mathbf{a}_c o raio δ e o valor absoluto de qualquer vetor intervalar limitado e não vazio $[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}^-, \mathbf{a}^+] \in \mathbb{IR}^n$ são definidos, respectivamente, por

$$\mathbf{a}_w := \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-, \quad \mathbf{a}_c := \frac{\mathbf{a}^- + \mathbf{a}^+}{2}, \quad \delta := \frac{\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-}{2} \quad e$$

$$|[\mathbf{a}]| := \max\{|\mathbf{a}^-|, |\mathbf{a}^+|\}, \text{ onde } |\mathbf{a}| = \{ |a_i| \}.$$

Definição 2.2.3. A interseção de dois vetores intervalares $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$, é definida por

$$[\mathbf{a}] \cap [\mathbf{b}] := ([a_1] \cap [b_1] \times [a_2] \cap [b_2] \times \dots \times [a_n] \cap [b_n]).$$

Definição 2.2.4. A casca intervalar de um subconjunto \mathcal{A} de \mathbb{R}^n , denotada por $[\mathcal{A}]$, é o menor vetor intervalar em \mathbb{IR}^n que contém \mathcal{A} .

Como a união de dois vetores intervalares não resulta necessariamente em um vetor intervalar fechado, define-se a *união intervalar* de dois vetores intervalares como a casca intervalar da união de dois vetores intervalares. Assim,

Definição 2.2.5. A união intervalar de dois vetores intervalares não vazios $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$, é definida por

$$[\mathbf{a}] \sqcup [\mathbf{b}] := [[\mathbf{a}] \cup [\mathbf{b}]] := ([a_1] \sqcup [b_1] \times [a_2] \sqcup [b_2] \times \dots \times [a_n] \sqcup [b_n]).$$

Também é verdadeiro que $[\mathbf{a}] \subset [\mathbf{b}]$ se e somente se $[a_1] \subset [b_1], [a_2] \subset [b_2], \dots, [a_n] \subset [b_n]$, assim como $\mathbf{a} \in [\mathbf{b}]$ se e somente se $a_1 \in [b_1], a_2 \in [b_2], \dots, a_n \in [b_n]$.

Operações clássicas para vetores intervalares são extensões diretas das operações para vetores degenerados. Assim, se $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então para $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \alpha[\mathbf{a}] &:= (\alpha[a_1]) \times (\alpha[a_2]) \times \dots \times (\alpha[a_n]), \\ [\mathbf{a}]^T [\mathbf{b}] &:= [a_1][b_1] + [a_2][b_2] + \dots + [a_n][b_n], \\ [\mathbf{a}] + [\mathbf{b}] &:= ([a_1] + [b_1]) \times ([a_2] + [b_2]) \times \dots \times ([a_n] + [b_n]). \end{aligned}$$

2.3 Matrizes Reais Intervalares

Uma *matriz intervalar* $[\mathbf{A}]$ de dimensão $n \times m$ é um subconjunto de $\mathbb{IR}^{n \times m}$, definido como o produto cartesiano de nm intervalos fechados. Assim, para $i = 1, 2, \dots, n$

e $j = 1, 2, \dots, m$

$$[\mathbf{A}] := \begin{bmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \dots & [a_{1m}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & \dots & [a_{2m}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n1}] & [a_{n2}] & \dots & [a_{nm}] \end{bmatrix} := [a_{11}] \times [a_{12}] \times \dots \times [a_{nm}] = [[a_{ij}]]$$

com $[a_{ij}] = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ sendo a projeção de $[\mathbf{A}]$ sobre os (i, j) -ésimos eixos.

O *limitante inferior* \mathbf{A}^- e o *limitante superior* \mathbf{A}^+ de uma matriz intervalar são matrizes degeneradas que consistem dos limitantes inferiores e superiores, respectivamente, dos seus componentes intervalares. Assim,

$$\mathbf{A}^- := \begin{bmatrix} a_{11}^- & a_{12}^- & \dots & a_{1m}^- \\ a_{21}^- & a_{22}^- & \dots & a_{2m}^- \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^- & a_{n2}^- & \dots & a_{nm}^- \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^+ := \begin{bmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^+ & \dots & a_{1m}^+ \\ a_{21}^+ & a_{22}^+ & \dots & a_{2m}^+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^+ & a_{n2}^+ & \dots & a_{nm}^+ \end{bmatrix}.$$

Definição 2.3.1. Duas matrizes $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+]$, $[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}^-, \mathbf{B}^+] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$, são iguais, ou seja, $[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]$, se e somente se $\mathbf{A}^- = \mathbf{B}^-$ e $\mathbf{A}^+ = \mathbf{B}^+$.

Definição 2.3.2. A largura \mathbf{A}_w , o ponto central \mathbf{A}_c , o raio Δ e o valor absoluto de qualquer matriz intervalar limitada e não vazia $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}^-, \mathbf{A}^+] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_w &:= \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-, \quad \mathbf{A}_c := \frac{\mathbf{A}^- + \mathbf{A}^+}{2}, \quad \Delta := \frac{\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-}{2} \text{ e} \\ |[\mathbf{A}]| &:= \max\{|\mathbf{A}^-|, |\mathbf{A}^+|\}, \text{ onde } |\mathbf{A}| = \{|a_{ij}|\} \end{aligned}$$

Para $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é verdadeiro que $[\mathbf{A}] \subset [\mathbf{B}]$ se e somente se $[a_{ij}] \subset [b_{ij}]$, assim como $\mathbf{C} \in [\mathbf{B}]$ se e somente se $c_{ij} \in [b_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Se $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$ são matrizes intervalares de dimensões apropriadas e se \diamond é um operador binário, então

$$[\mathbf{A}] \diamond [\mathbf{B}] = [\{\mathbf{A} \diamond \mathbf{B} : \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \text{ e } \mathbf{B} \in [\mathbf{B}]\}].$$

Se $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $[\mathbf{c}] \in \mathbb{IR}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \alpha[\mathbf{A}] &= (\alpha[a_{11}]) \times (\alpha[a_{12}]) \times \dots \times (\alpha[a_{nn}]), \\ [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}] &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]), (1 \leq (i, j) \leq n) \\ [\mathbf{A}][\mathbf{B}] &= \left(\sum_{k=1}^n [a_{ik}][b_{kj}] \right), (1 \leq (i, j) \leq n) \\ [\mathbf{A}][\mathbf{c}] &= \left(\sum_{j=1}^n [a_{ij}][c_j] \right), (1 \leq (i, j) \leq n). \end{aligned}$$

O produto de duas matrizes intervalares não é associativo, ou comutativo com escalares, ou seja, $([\mathbf{A}][\mathbf{B}])[\mathbf{C}] \neq [\mathbf{A}](\mathbf{B}[\mathbf{C}])$ e $\alpha([\mathbf{A}][\mathbf{c}]) \neq [\mathbf{A}](\alpha[\mathbf{c}])$.

2.4 Equações Lineares Intervalares

Considere agora equações lineares intervalares do tipo $[a][x] = [b]$, para $[a]$, $[b], [x] \in \mathbb{IR}$, com $[a] \neq [0,0]$. Para isso, define-se a função auxiliar

$$\mathcal{X}_{[a]} = \begin{cases} a^-/a^+, & \text{se } |a^-| \leq |a^+|, \\ a^+/a^-, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema 2.4.1. *A equação linear intervalar $[a][x] = [b]$ é satisfeita por $[x] \in \mathbb{IR}$ se e somente se $\mathcal{X}_{[a]} \geq \mathcal{X}_{[b]}$. A solução não é única se e somente se $\mathcal{X}_{[a]} = \mathcal{X}_{[b]} \leq 0$.*

Prova: Veja (ALEFELD; HERZBERGER, 1983) ■

Exemplo 2.4.1. *Considere a equação linear intervalar $[a][x] = [b]$, na qual $[a] = [1,2]$, $[b] = [-1,3]$ e $[x] \in \mathbb{IR}$. Esta equação é unicamente satisfeita por $[x] = [-1/2, 3/2]$, dado que $\mathcal{X}_{[a]} = 1/2 > \mathcal{X}_{[b]} = -1/3$. Por outro lado, considere o conjunto de soluções das equações $ax = b$, para $a \in [1,2]$ e $b \in [-1,3]$. Assim, a solução*

$$\{x = b/a \mid a \in [1,2] \text{ e } b \in [-1,3]\} = [-1,3]/[1,2] = [-1,3] \supset [x].$$

Neste sentido, $[x]$ é chamada de *solução algébrica* de $[a][x] = [b]$. Se $0 \notin [a]$, então $[x] \subseteq [b]/[a]$. Isto é verdadeiro, pois se existir $a \in [a]$ e $b \in [b]$ tais que $ax = b$, com $x = b/a \in [b]/[a]$, então $x \in [x]$.

Exemplo 2.4.2. *Considere o sistema de equações lineares intervalares de segunda ordem $[A][x] = [b]$, $[A] \in \mathbb{IR}^{2 \times 2}$, $[x]$ e $[b] \in \mathbb{IR}^2$, definido como*

$$\begin{aligned} [a_{11}][x_1] + [a_{12}][x_2] &= [b_1], \\ [a_{21}][x_1] + [a_{22}][x_2] &= [b_2]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, utilizando-se o processo de Eliminação de Gauss (BARNETT, 1990), o sistema (2.2) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} [a_{11}][x_1] + [a_{12}][x_2] &= [b_1], \\ ([a_{11}][a_{22}] - [a_{21}][a_{12}])[x_2] &= [a_{11}][b_2] - [a_{21}][b_1]. \end{aligned}$$

Se $0 \notin [a_{11}][a_{22}] - [a_{21}][a_{12}]$, então

$$[x_2] = \frac{[a_{11}][b_2] - [a_{21}][b_1]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{21}][a_{12}]}$$

e se $0 \notin [a_{11}]$, então

$$[x_1] = \frac{[b_1] - [a_{12}][x_2]}{[a_{11}]}.$$

Um rearranjo em (2.2) pode assegurar que $0 \notin [a_{11}]$ se a matriz $[\mathbf{A}]$, formada pelos coeficientes $[a_{ij}]$ para $i, j = 1, 2$, for não-singular, ou seja, $0 \notin \det([\mathbf{A}])$. Assim, a condição $0 \notin [a_{11}]$ não é essencialmente restritiva.

De forma alternativa, utilizando-se a Regra de Cramer (BARNETT, 1990),

$$\begin{aligned} [x_1] &= \frac{[b_1][a_{22}] - [b_2][a_{12}]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{12}][a_{21}]}, \\ [x_2] &= \frac{[b_2][a_{11}] - [b_1][a_{21}]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{12}][a_{21}]}. \end{aligned}$$

O conjunto solução para este sistema de equações intervalares é descrito por

$$\begin{aligned} [x_1] &= \left\{ \frac{[b_1][a_{22}] - [b_2][a_{12}]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{12}][a_{21}]} \text{ para todo } a_{ij} \in [a_{ij}] \text{ e } b_j \in [b_j] \right\}, \\ [x_2] &= \left\{ \frac{[b_2][a_{11}] - [b_1][a_{21}]}{[a_{11}][a_{22}] - [a_{12}][a_{21}]} \text{ para todo } a_{ij} \in [a_{ij}] \text{ e } b_j \in [b_j], \right\}. \end{aligned}$$

Para o caso em que $[a_{11}] = [a_{21}] = [1, 1]$, $[a_{12}] = [2, 2]$, $[a_{22}] = [10, 12]$, $[b_1] = [1, 1]$ e $[b_2] = [0, 0]$,

$$\begin{aligned} [x_1] &= \left\{ \frac{[a_{22}]}{[a_{22}] - [2, 2]} \text{ para todo } a_{22} \in [10, 12] \right\}, \\ [x_2] &= \left\{ \frac{-1}{[a_{22}] - [2, 2]} \text{ para todo } a_{22} \in [10, 12] \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando álgebra intervalar, obtêm-se $[x_1] = [1.0000, 1.5000]$ e $[x_2] = [-0.1250, -0.1000]$. O resultado obtido através do Intlab (RUMP, 2015), um programa de aritmética intervalar desenvolvido como uma toolbox do MATLAB, é dado por $[x_1] = [1.1941, 1.2503]$ e $[x_2] = [-0.1252, -0.0970]$.

A análise de sistemas de equações lineares intervalares pode ser colocada em termos mais gerais.

Definição 2.4.1. O conjunto-solução para equações lineares intervalares na forma $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$, $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$, é definido como

$$\Sigma := \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ para alguma } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \text{ e algum } \mathbf{b} \in [\mathbf{b}]\}.$$

Definição 2.4.2. Considere o conjunto

$$\mathcal{Z} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = +1 \text{ ou } x_i = -1, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

composto de 2^n vetores, tal que para cada $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

e para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{sign}(\mathbf{x})_i = \begin{cases} +1 & \text{se } x_i \geq 0, \\ -1 & \text{se } x_i < 0. \end{cases}$$

Logo, $\text{sign}(\mathbf{x}) \in \mathcal{Z}$ qualquer que seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Como $\mathbf{z} = \text{sign}(\mathbf{x})$, então $\mathbf{T}_{\mathbf{z}}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|$.

A seguinte caracterização de Σ em termos dos centros e raios de $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{b}]$ foi introduzida em (OETTLI; PRAGER, 1964) e (OETTLI, 1965).

Teorema 2.4.2 (*Desigualdade de Oettli-Prager*). *Considere a equação intervalar $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$, na qual $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_c - \Delta, \mathbf{A}_c + \Delta]$ e $[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}_c - \delta, \mathbf{b}_c + \delta]$. Então*

$$\Sigma = \{\mathbf{x} : |\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| - \Delta|\mathbf{x}| \leq \delta\}.$$

Prova: Em (OETTLI; PRAGER, 1964) e (OETTLI, 1965) é calculado o vetor residual $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c$ e demonstrado que $\mathbf{x} \in \Sigma$ se e somente se $\Delta|\mathbf{x}| + \delta \geq |\mathbf{r}(\mathbf{x})|$. A demonstração a seguir é baseada em (ROHN, 1989).

Necessidade: Se $\mathbf{x} \in \Sigma$, então $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para alguma $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e algum $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$, o que leva a $|\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| = |(\mathbf{A}_c - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{b}_c| \leq \Delta|\mathbf{x}| + \delta$, pois $|\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| = |\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{Ax} + \mathbf{b} - \mathbf{b}_c|$ implica que $0 = -\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, que por sua vez implica que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Suficiência: Considere $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_c - \Delta, \mathbf{A}_c + \Delta] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ uma matriz intervalar e $[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}_c - \delta, \mathbf{b}_c + \delta] \in \mathbb{IR}^n$ um vetor intervalar. Defina, para quaisquer vetores $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{yz}} &= \mathbf{A}_c - \mathbf{T}_{\mathbf{y}}\Delta\mathbf{T}_{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{b}_{\mathbf{y}} &= \mathbf{b}_c + \mathbf{T}_{\mathbf{y}}\delta. \end{aligned}$$

Assim, para cada $i, j = 1, 2, \dots, n$, defina

$$\begin{aligned} (A_{\mathbf{yz}})_{ij} &:= \begin{cases} (A_c - \Delta)_{ij} & \text{se } y_i z_j = 1, \\ (A_c + \Delta)_{ij} & \text{se } y_i z_j = -1, \end{cases} \\ (b_{\mathbf{y}})_i &:= \begin{cases} (b_c + \delta)_i & \text{se } y_i = 1, \\ (b_c - \delta)_i & \text{se } y_i = -1, \end{cases} \end{aligned}$$

de maneira que $\mathbf{A}_{\mathbf{yz}} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{b}_{\mathbf{y}} \in [\mathbf{b}]$. Considere

$$|\mathbf{A}_c\mathbf{x} - \mathbf{b}_c| \leq \Delta|\mathbf{x}| + \delta, \tag{2.3}$$

para algum \mathbf{x} e defina $\mathbf{y} = \text{sign}(\mathbf{A}_c \mathbf{x} - \mathbf{b}_c)$, então $\mathbf{y} \in \mathbf{Z}$ e

$$|\mathbf{A}_c \mathbf{x} - \mathbf{b}_c| = \mathbf{T}_y(\mathbf{A}_c \mathbf{x} - \mathbf{b}_c) = \Delta |\mathbf{x}| + \delta.$$

Como $\mathbf{T}_y^{-1} = \mathbf{T}_y$, tem-se que

$$\mathbf{A}_c \mathbf{x} - \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_y(\Delta |\mathbf{x}| + \delta). \quad (2.4)$$

Do mesmo modo, se \mathbf{x} satisfaz a equação (2.4) para algum $\mathbf{y} \in \mathbf{Z}$, então tomando o valor absoluto de ambos os lados de (2.4), tem-se que \mathbf{x} soluciona a desigualdade (2.3).

Defina $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, por

$$y_i = \begin{cases} (A_c x - b_c)_i / (\Delta |x| + \delta)_i, & \text{se } (\Delta |x| + \delta)_i > 0; \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $|\mathbf{y}| \leq \mathbf{e}$ e $\mathbf{A}_c \mathbf{x} - \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_y(\Delta |\mathbf{x}| + \delta)$. Definindo $\mathbf{z} = \text{sign}(\mathbf{x})$ e substituindo $|\mathbf{x}| = \mathbf{T}_z \mathbf{x}$ na desigualdade (2.4), obtém-se

$$\mathbf{A}_c \mathbf{x} - \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_y(\Delta \mathbf{T}_z \mathbf{x} + \delta)$$

ou seja,

$$\mathbf{A}_c \mathbf{x} - \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_y \Delta \mathbf{T}_z \mathbf{x} + \mathbf{T}_y \delta$$

que implica em

$$\mathbf{A}_c \mathbf{x} - \mathbf{T}_y \Delta \mathbf{T}_z \mathbf{x} = \mathbf{b}_c + \mathbf{T}_y \delta.$$

Colocando \mathbf{x} em evidência, tem-se que

$$(\mathbf{A}_c - \mathbf{T}_y \Delta \mathbf{T}_z) \mathbf{x} = \mathbf{b}_c + \mathbf{T}_y \delta$$

e portando, é verdadeiro que

$$\mathbf{A}_{yz} \mathbf{x} = \mathbf{b}_y.$$

Uma vez que $|\mathbf{T}_y \Delta \mathbf{T}_z| \leq \Delta$ e $|\mathbf{T}_y \delta| \leq \delta$, de maneira que $\mathbf{A}_{yz} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{b}_y \in [\mathbf{b}]$, tem-se que $\mathbf{x} \in \Sigma$. ■

O conjunto solução Σ é, em geral, não convexo, e sua determinação exata é um problema NP-difícil. É possível, alternativamente, trabalhar com uma aproximação externa de Σ , sua casca intervalar, ou seja, o menor vetor intervalar que contém Σ .

Definição 2.4.3. (NEUMAIER, 1990) A casca intervalar de Σ é o menor vetor intervalar contendo Σ , definido por

$$\Sigma_c := \{\mathbf{x} : \min \Sigma \leq \mathbf{x} \leq \max \Sigma\},$$

na qual \min e \max denotam o mínimo e máximo componente-a-componente sobre todos os vetores de Σ .

Exemplo 2.4.3. Defina $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-3}$,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad e \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,m} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \cdots & \gamma_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

na qual $\gamma_{i,j} \in [0,1]$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, são escolhidos de forma aleatória e considere o sistema de equações lineares intervalares $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$, apresentado em (BENTBIB, 2002), no qual $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_c - \Delta, \mathbf{A}_c + \Delta] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ e $[\mathbf{b}] = [\mathbf{b}_c - \delta, \mathbf{b}_c + \delta] \in \mathbb{IR}^{n \times 1}$, com

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{R} + 4\mathbf{E} - 2\mathbf{I}, \quad \Delta = \epsilon_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{e}_1 \quad e \quad \delta = \epsilon_2 \mathbf{e}_2.$$

A solução

$$[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 0.9945 & 1.0055 \\ 0.9931 & 1.0069 \\ 0.9938 & 1.0062 \\ 0.9944 & 1.0056 \\ 0.9936 & 1.0064 \\ 0.9931 & 1.0069 \end{bmatrix} \in \mathbb{IR}^{m \times 1}$$

foi obtida para $n = 10$ e $m = 6$ através do Intlab.

2.5 Regularidade de Matrizes Intervalares

Verificar se uma matriz intervalar é regular, ou seja, se todas as matrizes contidas no intervalo fechado ao qual pertence a matriz intervalar são não singulares, é um problema central em análise de matrizes e suas aplicações. Este problema tem sido amplamente tratado na literatura sobre análise intervalar (ROHN, 2009).

Definição 2.5.1. Uma matriz quadrada intervalar $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ é robustamente não singular (ou regular) se todas as matrizes $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ são não singulares.

A seguir são apresentadas algumas condições suficientes para a verificação da regularidade de uma matriz intervalar $[\mathbf{A}]$. A primeira, devida a Beeck (1975), assegura

que $[\mathbf{A}]$ é robustamente não singular se

$$\rho(|\mathbf{A}_c^{-1}|\Delta) < 1, \quad (2.5)$$

com

$$\rho(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda| : \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \text{ para algum } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}.$$

A segunda, devida a Rump (1993) e Rump (1994), assegura a não singularidade robusta de $[\mathbf{A}]$ se

$$\frac{\sigma_{\max}(\Delta)}{\sigma_{\min}(\mathbf{A}_c)} < 1,$$

em que $\sigma_{\max}(\Delta)$ e $\sigma_{\min}(\mathbf{A}_c)$ são os valores singulares máximo de Δ e mínimo de \mathbf{A}_c , respectivamente. Neumaier (1990) considera *fortemente regulares* as matrizes intervalares que satisfaçam (2.5).

Proposição 2.5.1. *Seja $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ e considere que \mathbf{A}_c é regular. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $[\mathbf{A}]$ é fortemente regular;
- (ii) $[\mathbf{A}]^T$ é fortemente regular;
- (iii) $\mathbf{A}_c[\mathbf{A}]$ é regular;
- (iv) $\rho(|\mathbf{A}_c^{-1}|\Delta) < 1$;
- (v) $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}_c^{-1}[\mathbf{A}]\|_u < 1$, onde $\|\mathbf{x}\|_u = (\sum_i |x_i|^u)^{1/u}$, $u \geq 1$.

Prova: ver (NEUMAIER, 1990).

Definição 2.5.2. *O raio de não singularidade robusta de uma matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ é definido como*

$$\epsilon^* := \inf \{ \epsilon \geq 0 : \mathbf{A}_c - \epsilon\Delta \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}_c + \epsilon\Delta, \text{ para alguma } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \text{ não singular} \}$$

e o seu valor é dado por

$$\epsilon^* = \left\{ \max_{\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}} \{ \rho_0(\mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{T}_{\mathbf{y}} \Delta \mathbf{T}_{\mathbf{z}}) \} \right\}^{-1}$$

com $\rho(\mathbf{A})$ definido logo após (2.5).

O cálculo de ϵ^* também é um problema NP-difícil (BLONDEL; TSITSIKLIS, 2000). A questão da determinação da não singularidade robusta de matrizes intervalares tem sido amplamente tratada na literatura. No entanto, todas as condições necessárias e suficientes para a determinação da não singularidade robusta apresentam complexidade exponencial, ou seja, há a necessidade de se solucionar pelo menos 2^n problemas de algum tipo.

A seguir são apresentados alguns resultados utilizados no Teorema 2.5.2, para a verificação da não singularidade robusta de matrizes intervalares, baseados em propriedades de problemas de Programação Linear.

Teorema 2.5.1. *Uma matriz intervalar $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ é singular se e somente se a inequação*

$$|A_c x| \leq \Delta |x|$$

tiver uma solução não trivial.

Prova: $[A]$ é singular se e somente se existe $A \in [A]$ tal que $Ax = 0$, para algum $x \neq 0$, o que, pelo Teorema 2.4.2, é equivalente a

$$A_c x - \Delta |x| \leq 0 \leq A_c x + \Delta |x|$$

e, portanto, $|A_c x| \leq \Delta |x|$. ■

O Teorema 2.5.2, derivado de (JANSSON; ROHN, 1999), leva a condições necessárias e suficientes para a verificação da não singularidade robusta de matrizes intervalares.

Teorema 2.5.2. *Uma matriz intervalar $[A] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ é robustamente não singular se e somente se o problema de Programação Linear*

$$(P_z) \quad \begin{cases} \text{maximizar} & z^T x \\ & x \\ \text{sujeito a} & (A_c - \Delta T_z)x \leq 0, \\ & (A_c + \Delta T_z)x \geq 0, \\ & T_z x \geq 0 \end{cases}$$

é limitado para todo $z \in \mathcal{Z}$.

Prova: Se $[A]$ é singular, pelo Teorema 2.5.1 existe $x \neq 0$ tal que

$$-\Delta |x| \leq A_c x \leq \Delta |x|. \quad (2.6)$$

Com $z = \text{sign}(x)$, tem-se que $|x| = T_z x \geq 0$ e, da expressão (2.6), $(A_c - \Delta T_z)x \leq 0$ e $(A_c + \Delta T_z)x \geq 0$, implicando que x é factível. Como αx também é factível para cada $\alpha > 0$, o valor

$$z^T(\alpha x) = \alpha \sum_{i=1}^n |x_i|$$

pode ser feito arbitrariamente grande, e o problema é ilimitado. Por outro lado, se o problema é ilimitado para algum $z \in \mathcal{Z}$, então existe um $x \neq 0$ que satisfaz $(A_c - \Delta T_z)x \leq 0$, $(A_c + \Delta T_z)x \geq 0$ e $T_z x \geq 0$, com $z^T x > 0$. Como $T_z x = |x|$ para $x \neq 0$, $[A]$ é singular. ■

Assim, se para algum $z \in \mathcal{Z}$ a solução do problema de Programação Linear associado é ilimitada, $[A]$ é singular. O Teorema 2.5.2 implica que 2^n problemas de Programação Linear devem ser testados de maneira a provar que a matriz intervalar $[A]$ é robustamente não singular.

A partir deste resultado de Jansson e Rohn (1999), pode-se mostrar que apenas metade dos problemas lineares associados a esta condição precisam ser verificados, reduzindo consideravelmente o custo computacional envolvido na verificação.

Corolário 2.5.1. (FAZZOLARI; FERREIRA, 2017) *Considere o problema de Programação Linear (P_z) . No máximo 2^{n-1} problemas lineares (P_z) precisam ser verificados para estabelecer a não singularidade de $[A]$.*

Prova: Como (P_z) é factível para todo $z \in \mathcal{Z}$, pois o vetor nulo é factível, o Teorema 2.5.2 exige que até 2^n (a cardinalidade de \mathcal{Z}) problemas lineares sejam resolvidos antes de concluir que $[A]$ é regular.

Argumenta-se aqui que no máximo 2^{n-1} problemas lineares precisam ser resolvidos, fixando qualquer componente de z em 1 ou -1 , por exemplo, $z_1 = 1$, e restringindo z a

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \{z = (1, z_2, \dots, z_n) : |z_j| = 1, 2 \leq j \leq n\}.$$

De fato, como $T_{-z} = -T_z$, segue que x é viável para (P_z) se e somente se $-x$ for viável para (P_{-z}) , e então os valores das funções-objetivo de (P_z) e (P_{-z}) são iguais. Assim sendo, (P_z) é ilimitado (limitado), se e somente se (P_{-z}) é ilimitado (limitado). ■

O valor ótimo de (P_z) pode ser caracterizado como segue. Defina $y := T_z x$, seja $e \in \mathbf{R}^n$ o vetor unitário e observe que $T_z^{-1} = T_z$. Então, o problema (P_z) é equivalente a

$$(Q_z) \left\{ \begin{array}{l} \underset{y}{\text{maximizar}} \quad e^T y \\ \text{subjeito a} \quad (A_c T_z - \Delta)y \leq 0, \\ \quad \quad \quad (A_c T_z + \Delta)y \geq 0, \\ \quad \quad \quad y \geq 0. \end{array} \right.$$

Se y é viável para (Q_z) , então αy com $\alpha > 0$ também é viável, e $y \neq 0$ implica que (Q_z) é ilimitado pois $\alpha \rightarrow \infty$. Consequentemente, $(Q_z), z \in \tilde{\mathcal{Z}}$, é limitado se e somente se a solução ótima for $y = 0$ e o valor ótimo for 0. De maneira equivalente, $(P_z), z \in \tilde{\mathcal{Z}}$, é limitado se e somente se a solução ótima for $x = 0$ com valor ótimo 0. Isto é consistente com a condição necessária e suficiente (ii) de (ROHN, 2009), que dá origem ao problema (P_z) .

Sendo assim, mostra-se que o limite existente no número de problemas lineares que devem ser resolvidos para verificar a regularidade de matrizes intervalares pode ser melhorado por um fator de 2. Verifica-se também que o valor ótimo de P_z funciona como

uma função indicadora para $z \in \tilde{\mathcal{Z}}$, sendo igual a 0, se $P(z)$ é limitado, e igual a $+\infty$, caso contrário.

Exemplo 2.5.1. *Seja a matriz intervalar*

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & a_1 \\ b_1 & a_1 & 1 \end{bmatrix},$$

com $[b_1] = [7,9]$, $[a_2] = [3,5]$, $[a_1] = [2,4]$.

Como a ordem da matriz do sistema é $n = 3$, de acordo com o Corolário 2.5.1 deve-se resolver $2^2 = 4$ problemas de programação linear. Para ilustrar este fato, a Tabela 1 apresenta os $2^n = 2^3 = 8$ vetores do conjunto \mathcal{Z} e a solução do problema de Programação Linear (P_z) para cada $z \in \mathcal{Z}$.

Tabela 1 – Soluções de P_z

z	Solução
$[1 \ 1 \ 1]$	factível
$[1 \ 1 \ -1]$	ilimitado
$[1 \ -1 \ 1]$	ilimitado
$[1 \ -1 \ -1]$	factível
$[-1 \ 1 \ 1]$	factível
$[-1 \ 1 \ -1]$	ilimitado
$[-1 \ -1 \ 1]$	ilimitado
$[-1 \ -1 \ -1]$	factível

Observando-se a Tabela 1 nota-se que é necessário testar somente a metade dos elementos do conjunto \mathcal{Z} .

2.6 Positividade de Matrizes Intervalares

Uma condição necessária e suficiente para a positividade de matrizes intervalares é apresentada em Rohn (1994). Antes de apresentar o resultado, é necessário introduzir algumas notações e conceitos que serão utilizados.

Dada uma matriz quadrada real $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, denota-se a transposta de \mathbf{A} como \mathbf{A}^T e o seu raio espectral como $\rho(\mathbf{A})$. A matriz \mathbf{A} é simétrica se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Denota-se por λ_{min} e λ_{max} os autovalores mínimo e máximo \mathbf{A} , respectivamente. Uma matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ é simétrica se tanto a matriz central \mathbf{A}_c quanto a matriz raio Δ forem simétricas.

Para cada matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ pode-se obter a matriz simétrica intervalar correspondente como

$$[\mathbf{A}]_s = [\mathbf{A}'_c - \Delta', \mathbf{A}'_c + \Delta'],$$

com \mathbf{A}'_c e $\mathbf{\Delta}'$ dados por

$$\mathbf{A}'_c = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_c + \mathbf{A}_c^T)$$

e

$$\mathbf{\Delta}' = \frac{1}{2}(\mathbf{\Delta} + \mathbf{\Delta}^T).$$

Se $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$, então $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \in [\mathbf{A}]_s$, e $[\mathbf{A}]$ será simétrica se e somente se $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}]_s$.

Considere o conjunto de índices \mathcal{Z} introduzido na Definição 2.4.2. Para cada $z \in \mathcal{Z}$, define-se a matriz \mathbf{A}_z como

$$\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_c - \mathbf{T}_z \mathbf{\Delta} \mathbf{T}_z.$$

Então, para cada i, j , tem-se $(\mathbf{A}_z)_{ij} = (\mathbf{A}_c)_{ij} - z_i(\mathbf{\Delta})_{ij}z_j = (\mathbf{A}_c - \mathbf{\Delta})_{ij}$, se $z_i z_j = 1$ e $(\mathbf{A}_z)_{ij} = (\mathbf{A}_c + \mathbf{\Delta})_{ij}$, se $z_i z_j = -1$. Então $\mathbf{A}_z \in [\mathbf{A}]$ para cada $z \in \mathcal{Z}$ e, como $\mathbf{A}_{-z} = \mathbf{A}_z$, o número de matrizes mutuamente diferentes \mathbf{A}_z será no máximo 2^{n-1} (e igual a 2^{n-1} se $\mathbf{\Delta} > 0$). Se $[\mathbf{A}]$ é simétrica, então cada \mathbf{A}_z será simétrica.

Vamos introduzir a função $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\mathbf{A}) = \min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

O Teorema 2.6.1 a seguir apresenta resumidamente as propriedades básicas de f .

Teorema 2.6.1. *A função f tem as seguintes propriedades:*

- (i) $f(\mathbf{A}) = f\left(\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\right)$ para cada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- (ii) $f(\mathbf{A}) = \lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$ para cada matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- (iii) $|f(\mathbf{A} + \mathbf{D}) - f(\mathbf{A})| \leq \rho\left(\frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)\right)$ para cada $\mathbf{A}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- (iv) f é contínua em $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- (v) para cada matriz intervalar $[\mathbf{A}]$,

$$\min\{f(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in [\mathbf{A}]\} = \min\{f(\mathbf{A}_z) : z \in \mathcal{Z}\};$$

- (vi) para cada matriz intervalar $[\mathbf{A}]$,

$$\min\{f(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in [\mathbf{A}]\} = \min\{f(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in [\mathbf{A}]_s\};$$

- (vii) cada matriz intervalar $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_c - \mathbf{\Delta}, \mathbf{A}_c + \mathbf{\Delta}]$ satisfaz

$$\min\{f(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in [\mathbf{A}]\} \geq f(\mathbf{A}_c) - \rho(\mathbf{\Delta}')$$

- (viii) se \mathbf{A} é simétrica e $f(\mathbf{A}) = 0$, então \mathbf{A} é singular.

Prova: ver Rohn (1994). ■

Definição 2.6.1. Uma matriz quadrada \mathbf{A} (não necessariamente simétrica) é positiva semidefinida se $f(\mathbf{A}) \geq 0$, o que implica que $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ para cada \mathbf{x} . De maneira similar, \mathbf{A} é positiva definida se $f(\mathbf{A}) > 0$, isto é, se $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ para cada $\mathbf{x} \neq 0$. Uma matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ é positiva (semi)definida se cada $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ é positiva (semi)definida.

Como consequência do Teorema 2.6.1 obtém-se a seguinte caracterização.

Teorema 2.6.2. Seja $[\mathbf{A}]$ uma matriz intervalar quadrada. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) $[\mathbf{A}]$ é positiva (semi)definida,
- b) $[\mathbf{T}_z \mathbf{A}_s]$ é positiva (semi)definida,
- c) $[\mathbf{A}_z]$ é positiva (semi)definida para cada $z \in \mathcal{Z}$.

Prova: ver Rohn (1994). ■

Exemplo 2.6.1. Seja a matriz

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

com $\Delta_{i,j} = 0,03$ para cada i, j . Então,

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_c - \Delta, \mathbf{A}_c + \Delta] = \begin{bmatrix} [0,97, 1,03] & [0,97, 1,03] & [-0,03, 0,03] \\ [0,97, 1,03] & [1,97, 2,03] & [1,97, 2,03] \\ [-0,03, 0,03] & [1,97, 2,03] & [4,97, 5,03] \end{bmatrix} = \mathbf{A}_c - \mathbf{T}_z \Delta \mathbf{T}_z$$

É necessário testar $2^3 = 8$ matrizes \mathbf{A}_z para verificar a positividade da matriz intervalar $[\mathbf{A}]$. Verifica-se que todas as matrizes \mathbf{A}_z são positiva definidas. Portanto $[\mathbf{A}]$ é positiva definida.

2.7 Pacote *Intlab*

O *Intlab* é um pacote para *Matlab* que implementa algoritmos de análise intervalar. O *Intlab* fornece a função *verifylss* para a solução de sistemas lineares intervalares, fornecendo uma aproximação externa intervalar de excelente qualidade (RUMP, 2015). Se \mathbf{A} ou \mathbf{b} (de um sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) forem intervalares, o comando "\ " é equivalente a chamar o comando *verifylss*.

Numa primeira etapa, a função *verifylss* implementa o *método de Krawczyk residual* (uma variação do método de Krawczyk apresentado em Neumaier (1990)). Caso o método baseado no operador de Krawczyk não forneça solução após sete iterações, a função *verifylss* implementa o método de *Hansen-Bliek-Rohn-Ning-Kearfott-Neumaier*.

A seguir apresenta-se o principal método utilizado pelo *Intlab* para a resolução de sistemas lineares intervalares, o *método de Krawczyk*, como exposto em Hargreaves (2002).

Define-se um pré-condicionador $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a inversa da matriz central de $[\mathbf{A}]$, $\mathbf{C} = (\mathbf{A}_c)^{-1}$. Assumindo que existe $[\mathbf{x}]^{(i)}$ tal que $\Sigma_c([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq [\mathbf{x}]^{(i)}$ para toda iteração i vale a inclusão

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \in \mathbf{C}[\mathbf{b}] + (\mathbf{I} - \mathbf{C}[\mathbf{A}])[\mathbf{x}]^{(i)},$$

para qualquer $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$. Então,

$$\Sigma_c([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq [\mathbf{x}]^{(i)} \text{ implica } \Sigma_c([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq (\mathbf{C}[\mathbf{b}] + (\mathbf{I} - \mathbf{C}[\mathbf{A}])[\mathbf{x}]^{(i)}) \cap [\mathbf{x}]^{(i)}. \quad (2.7)$$

A expressão (2.7) gera a *iteração de Krawczyk*,

$$[\mathbf{x}]^{i+1} = (\mathbf{C}[\mathbf{b}] + (\mathbf{I} - \mathbf{C}[\mathbf{A}])[\mathbf{x}]^{(i)}) \cap [\mathbf{x}]^{(i)}.$$

Definindo $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ para alguma $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e algum $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$, o vetor inicial $[\mathbf{x}]^{(0)}$ deve respeitar as condições $\tilde{\mathbf{x}} \in [\mathbf{x}]^{(0)}$ e $\Sigma_c([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq [\mathbf{x}]^{(0)}$. Então, satisfeito o critério de parada do algoritmo, que pode ser definido como $(\delta)^{(i)} - (\delta)^{(i+1)} < \epsilon$, com $\epsilon > 0$ dado, a solução $[\mathbf{x}]$ é uma aproximação externa da casca intervalar $\Sigma_c([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$.

A implementação do método de Krawczyk (função *verifylss*) é um pouco diferente da apresentada anteriormente, pois utiliza o *método de Krawczyk residual*. A implementação do método de Krawczyk residual requer $2n^3$ operações para calcular a inversa de uma matriz e $4n^3$ operações para multiplicações matriciais intervalares, resultando em um termo dominante de $6n^3$ operações. As outras operações apresentam complexidade assintótica de ordem menor e foram omitidas desta análise.

2.8 Conclusão

As definições apresentadas sobre conjuntos intervalares, álgebra intervalar e a caracterização e a solução de equações lineares intervalares introduzidas no Capítulo 2 permitem um entendimento dos conceitos e metodologias apresentados nos próximos capítulos, que levam aos principais resultados desta Tese.

3 Análise Intervalar com Tratamento de Multi-incidências de Parâmetros

O problema de resolver sistemas de equações lineares é muito bem conhecido e amplamente encontrado em Engenharia. Em aplicações práticas, na maioria das vezes existe algum grau de incerteza em relação a certos parâmetros, seja devido a medições ou por incertezas no modelo matemático e nos componentes físicos do sistema (MERLET, 2009), (BUSLOWICZ, 2010). Nestes casos, é importante levar em conta as incertezas ao resolver sistemas de equações lineares.

Este Capítulo 3 trata da solução de sistemas lineares intervalares considerando que existe dependência entre parâmetros incertos nas matrizes do sistema, e então realiza um tratamento para estas multi-incidências. Este problema foi estudado por vários autores.

O primeiro artigo a tratar sistemas intervalares parametrizados (com uma estrutura especial) foi Jansson (1991). Para uma classe especial de sistemas paramétricos, Neumaier e Pownuk (2007) propuseram um método de resolução eficaz. O problema geral de sistemas lineares dependentes de parâmetros intervalares foi tratado inicialmente por Rump (1994). Outros estudos foram realizados acerca do assunto (BENJOVENGO, 2006), tais como a caracterização dos limites do conjunto-solução (POPOVA; KRÄMER, 2008), a qualidade do conjunto-solução (POPOVA, 2002) e uma caracterização explícita do conjunto-solução para uma classe de sistemas intervalares paramétricos (HLADÍK, 2008), (POPOVA, 2009). A geometria dos conjuntos-solução foi estudada por Alefeld *et al.* (1997), Alefeld *et al.* (2003).

Kolev propôs um método direto (KOLEV, 2006) e um iterativo (KOLEV, 2004) para a determinação do conjunto-solução. A iteração parametrizada de Gauss-Seidel foi utilizada por Popova (2001), um método direto por Skalna (2006) e uma abordagem que emprega monotonicidade por Popova (2006) e Skalna (2008). Aproximações internas e externas geradas por um método de ponto fixo foram desenvolvidas por Rump (1994) e aprimoradas por Popova e Krämer (2007).

3.1 Sistemas Lineares Intervalares

O tratamento de sistemas lineares intervalares através da análise intervalar clássica leva a superestimações do conjunto-solução, uma vez que pressupõe-se que as entradas da matriz e dos componentes do vetor do lado direito variam independentemente e simultaneamente dentro de intervalos dados, ou seja, a existência de parâmetros multi-

incidentes não é considerada. O objetivo ao realizar o tratamento destas multi-incidências é evitar esta superestimação.

Um sistema linear intervalar é definido como uma família de sistemas lineares

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

com $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ e $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$. Cada coeficiente $a_{ij} \in [a_{ij}]$, $b_i \in [b_i]$ para $i = 1, \dots, n$ pode variar entre um valor máximo e mínimo, independentemente das variações de outros coeficientes. Para resolver este problema, deve-se calcular um vetor intervalar $[\mathbf{x}]$ que contém o conjunto-solução:

$$\Sigma([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \exists \mathbf{b} \in [\mathbf{b}] \text{ e } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}. \quad (3.1)$$

Teorema 3.1.1. *Sejam $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[\mathbf{Y}] \in \mathbb{IR}^n$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, e defina*

$$[\mathbf{Z}] := \diamond\{\mathbf{R}([\mathbf{b}] - [\mathbf{A}]\tilde{\mathbf{x}})\} \in \mathbb{IR}^n, \quad [\mathbf{C}] := \diamond\{\mathbf{I} - \mathbf{R}[\mathbf{A}]\} \in \mathbb{IR}^{n \times n}.$$

Defina $[\mathbf{V}] \in \mathbb{IR}^n$ através da seguinte recursão, para $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{V}_i := \{\diamond([\mathbf{Z}] + [\mathbf{C}][\mathbf{U}])\}_i \quad \text{com} \quad [\mathbf{U}] := (\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{Y}_i, \dots, \mathbf{Y}_n)^T.$$

Se $[\mathbf{V}] \subsetneq [\mathbf{Y}]$, então \mathbf{R} e cada matriz $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ é não singular, e para cada $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$, a solução única $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfaz $\hat{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{V}]$. Defina o conjunto-solução Σ como (3.1). Então, com $[\Delta] := \diamond\{[\mathbf{C}][\mathbf{V}]\} \in \mathbb{IR}^n$, as seguintes estimativas internas são válidas para $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i + \inf([\mathbf{Z}]_i) + \sup([\Delta]_i) &\geq \inf_{\rho \in \Sigma} \rho_i \quad e \\ \tilde{x}_i + \sup([\mathbf{Z}]_i) + \inf([\Delta]_i) &\leq \sup_{\rho \in \Sigma} \rho_i \end{aligned}$$

Prova: Ver Rump (1994). ■

O conjunto solução $\Sigma = \Sigma([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ é, em geral, não convexo. Além disso, o cálculo de $\diamond\Sigma$, a casca intervalar de Σ é um problema NP-difícil. Ainda assim, o Teorema 3.1.1 possibilita encontrar aproximações externa e interna de Σ , com a qualidade determinada pelo raio de $[\Delta]$; $[\Delta]$ é o produto de intervalos pequenos, desde que a largura de $[\mathbf{A}]$ não seja muito grande. Se esta condição for verdadeira, a qualidade da solução é boa. Porém, o Teorema 3.1.1 considera que os coeficientes de \mathbf{A} e \mathbf{b} podem variar de maneira independente em $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{b}]$. Em aplicações práticas isto não ocorre, uma vez que parâmetros iguais, embora incertos, variam de forma igual. Um exemplo simples de múltiplas incidências é o caso de matrizes simétricas, nas quais somente $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ com $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ são consideradas, definindo-se o conjunto-solução:

$$\Sigma^{sim}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \exists \mathbf{b} \in [\mathbf{b}], \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \text{ e } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

É claro que $\Sigma^{sim}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq \Sigma([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$.

Exemplo 3.1.1. (JANSSON, 1991) Considere a matriz de Hilbert

$$(\mathbb{H}_n)_{ij} := (\text{mmc}(1, \dots, 2n-1))/(i+j+1)$$

de dimensão $n = 5$. (*mmc*: mínimo múltiplo comum). O lado direito é dado por $[\mathbf{b}] = \mathbf{H}_5 \mathbf{x}$ com

$$\mathbf{x} = (1,00000, -0,50000, 0,37500, -0,31250, 0,27344).$$

Os coeficientes de $[\mathbf{A}]$ são definidos por

$$[a_{i,i+1}] = [a_{i+1,i}] := [H_{i,i+1}(1 - 3 \cdot 10^{-6}); H_{i,i+1}(1 + 3 \cdot 10^{-6})], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

e $[a_{ij}] = (H_5)_{ij}$ para os outros coeficientes.

Se não considerarmos a simetria, ou seja, sem considerar nenhuma dependência entre os parâmetros do sistema, obtemos a solução

$$x = \begin{bmatrix} [0,9894, 1,0106] \\ [-0,6940, -0,3060] \\ [-0,4554, 1,2054] \\ [-0,9359, 1,5609] \\ [-0,3355, 0,8824] \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} 0,0105 \\ 0,1940 \\ 0,8303 \\ 1,2484 \\ 0,6089 \end{bmatrix}$$

Considerando a simetria da matriz, obtemos

$$x_{sim} = \begin{bmatrix} [0,9992, 1,0008] \\ [-0,5138, -0,4862] \\ [0,3171, 0,4329] \\ [0,2264, 0,3986] \\ [0,2317, 0,3151] \end{bmatrix}, \quad \delta_{sim} = \begin{bmatrix} 0,0008 \\ 0,0137 \\ 0,0578 \\ 0,0860 \\ 0,0416 \end{bmatrix}$$

Se considerarmos a simetria da matriz A , o raio da solução é significativamente menor, e obviamente $\Sigma^{sim}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq \Sigma([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$.

3.2 Tratamento de Multi-incidências

A determinação de $\Sigma([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ considerando a dependência entre dados foi inicialmente tratada por Jansson (1991) para o caso de matrizes simétricas e anti-simétricas com dependências no lado direito do sistema. Já Rump (1994) tratou as dependências dos parâmetros de maneira geral, tanto no lado direito quanto no lado esquerdo, considerando dependências do tipo linear-afim.

Para um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$ considere sistemas lineares $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ dependentes de $\boldsymbol{\theta}$. Se $\boldsymbol{\theta}$ varia no intervalo $[\boldsymbol{\theta}] \in \mathbb{IR}^k$, pode-se definir o conjunto-solução

$$\Sigma(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}), [\boldsymbol{\theta}]) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \boldsymbol{\theta} \in [\boldsymbol{\theta}] : \mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{b} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}) \text{ e } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Considere $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ linearmente dependentes de $\boldsymbol{\theta}$, ou seja, existem vetores $\mathbf{w}(i,j) \in \mathbb{R}^k$ para $0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, tais que

$$\{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\}_{ij} = \mathbf{w}(i,j)^T \boldsymbol{\theta} \text{ e } \{\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})\}_j = \mathbf{w}(0,j)^T \boldsymbol{\theta}. \quad (3.2)$$

Cada componente $\{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\}_{ij}$ e $\{\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})\}_j$ de $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$, respectivamente, depende linearmente de $\boldsymbol{\theta}$.

Teorema 3.2.1. *Seja $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ com $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$ um sistema linear parametrizado, onde $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ são descritas por (3.2). Seja $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[\mathbf{y}] \in \mathbb{IR}^n$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, e defina $[\mathbf{z}] \in \mathbb{IR}^n$, $[\mathbf{C}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ como*

$$[\mathbf{z}]_i := \left[\sum_{j,\nu=1}^m \{\mathbf{R}_{ij}(\mathbf{w}(0,j) - \mathbf{x}_\nu \mathbf{w}(j,\nu))\}^T \right] [\boldsymbol{\theta}], \quad (3.3)$$

$$[\mathbf{C}] := \mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{A}([\boldsymbol{\theta}]). \quad (3.4)$$

Defina $[\mathbf{v}] \in \mathbb{IR}^m$ através da seguinte recursão: para $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &:= \{\diamond([\mathbf{z}] + [\mathbf{C}][\mathbf{u}])\}_i \\ \text{onde } [\mathbf{u}] &:= (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{y}_n)^T. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se $[\mathbf{v}] \subsetneq [\mathbf{y}]$, então \mathbf{R} e cada matriz $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ com $\boldsymbol{\theta} \in [\boldsymbol{\theta}]$ é não singular, e para cada $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ com $\boldsymbol{\theta} \in [\boldsymbol{\theta}]$ a solução única $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfaz $\hat{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{v}]$. Então, as seguintes estimativas internas são válidas para $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} x_i^- &:= \tilde{x}_i + \inf([\mathbf{z}]_i) + \sup([\boldsymbol{\Delta}]_i) \geq \inf_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma} \sigma_i \quad e \\ x_i^+ &:= \tilde{x}_i + \sup([\mathbf{z}]_i) + \inf([\boldsymbol{\Delta}]_i) \leq \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma} \sigma_i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Prova: Ver (RUMP, 1994). ■

As aproximações externa e interna do conjunto-solução de $\mathbf{A}(\mathbf{c})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{c})$, com $\mathbf{c} \in [\mathbf{c}]$, são definidas por $[\mathbf{x}_{\text{out}}] := \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{v}]$ e $[\mathbf{x}_{\text{inn}}] := [\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+]$, respectivamente.

A primeira parte do Teorema 3.2.1 estabelece a existência e unicidade da solução. A existência vem do Teorema do Ponto-Fixo de Brouwer, pois $g(\mathbf{p}, \mathbf{x}) := \mathbf{x} - \mathbf{R}f(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, com $f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) := \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x} - \mathbf{b}(\mathbf{p})$ tem-se a expansão $f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{A}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$ (POPOVA; KRÄMER, 2003). Um ponto importante é obter a casca do conjunto-solução do sistema parametrizado para obter limites definidos por

$$\mathbf{z} := -\mathbf{R}f(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}}, [\mathbf{p}]) := \diamond(\mathbf{R}\{\mathbf{b}(\mathbf{p}) - \mathbf{A}(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]\})$$

pois uma avaliação direta de $\mathbf{R}(\mathbf{b}(\mathbf{p}) - \mathbf{A}(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{x}})$ causa superestimação. $[\mathbf{z}]$ definido no Teorema 3.2.1 provê uma melhor estimativa. Além disso, através do Teorema 3.2.1 é possível

obter as soluções interna e externa do sistema linear $[\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]$. Como a estimação da casca intervalar da solução é bastante trabalhosa, é possível obter uma estimação desta obtendo-se a diferença entre as soluções interna e externa. Quanto mais próximas estas estiverem entre si, significa que a solução encontrada é próxima da casca intervalar. Desta forma é possível estimar a qualidade da solução obtida mesmo sem conhecer a casca intervalar do sistema.

Exemplo 3.2.1. (RUMP, 1994) Para exemplificar o uso do Teorema 3.2.1, considere o sistema linear

$$[\mathbf{A}] := \begin{pmatrix} 3 & [1, 2] \\ [1, 2] & 3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{b}] := \begin{pmatrix} [10, 10, 5] \\ [10, 10, 5] \end{pmatrix}$$

O vetor $[\boldsymbol{\theta}]$ que parametriza o sistema é $[\boldsymbol{\theta}]^T = [3 \ [1, 2] \ [10, 10, 5]]$. Desta forma é possível encontrar a representação do vetor $[\mathbf{b}]$:

$$\mathbf{w}(0,1)^T = [0 \ 0 \ 1] \quad e \quad \mathbf{w}(0,2)^T = [0 \ 0 \ 1],$$

e da matriz $[\mathbf{G}]$:

$$\mathbf{w}(1,1)^T = [1 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{w}(1,2)^T = [0 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{w}(2,1)^T = [0 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{w}(2,2)^T = [1 \ 0 \ 0].$$

Também é necessário definir as grandezas $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $[\mathbf{y}] \in \mathbb{IR}^2$. Estas definições são utilizadas para centralizar a casca intervalar $[\mathbf{v}]$ e podem ser definidas como sugerido em Rump (1994): $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{b}_c$, $\mathbf{R} = (\mathbf{A}_c)^{-1}$ e $[\mathbf{y}]$ como solução do sistema linear intervalar $(\mathbf{I} - [\mathbf{C}])[\mathbf{y}] = [\mathbf{z}]$. Então, aplicando o Teorema 3.2.1 para este exemplo,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2,2778 \\ 2,2778 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,4444 & -0,2222 \\ -0,2222 & 0,4444 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} [-0,1112, 0,1112] & [-0,2223, 0,2223] \\ [-0,2223, 0,2223] & [-0,1112, 0,1112] \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} [-0,3087, 0,3087] \\ [-0,3087, 0,3087] \end{bmatrix}.$$

Pode-se então obter $[\mathbf{y}]$ e $[\mathbf{v}]$ dados por

$$[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} [-0,4722, 0,4722] \\ [-0,4722, 0,4722] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} [-0,4661, 0,4661] \\ [-0,4647, 0,4647] \end{bmatrix}.$$

Como $[\mathbf{y}] \subsetneq [\mathbf{v}]$, a solução externa do sistema é $\tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{v}]$. Então, obtém-se,

$$[\mathbf{x}_{out}] = \begin{bmatrix} [1,8117, 2,7438] \\ [1,8131, 2,7425] \end{bmatrix}$$

E a solução interna é dada por

$$[\mathbf{x}_{inn}] = \begin{bmatrix} [2,1241, 2,4314] \\ [2,1243, 2,4313] \end{bmatrix}$$

Observa-se que as soluções interna e externa estão próximas, o que denota uma boa aproximação da casca intervalar de Σ .

Este resultado pode ser comparado com o obtido pela análise intervalar clássica utilizando o Intlab (toolbox do Matlab para Análise Intervalar), que implementa um método para a solução de sistemas lineares sem levar em conta as multi-incidências de parâmetros intervalares (RUMP, 2015). A solução obtida pelo Intlab é

$$[\mathbf{x}_{cla}] = \begin{bmatrix} [0,8614, 3,6942] \\ [0,8614, 3,6942] \end{bmatrix}.$$

Este exemplo ilustra a redução de conservadorismo utilizando-se o método proposto, que considera parâmetros multi-incidentes. O raio da solução pela análise intervalar clássica é significativamente maior do que o obtido através do método de Rump (1994):

$$[\delta_{out}] = \begin{bmatrix} 0,4661 \\ 0,4647 \end{bmatrix}, \text{ e } [\delta_{cla}] = \begin{bmatrix} 1,4163 \\ 1,4163 \end{bmatrix}.$$

De fato, $\Sigma \subseteq [x_{out}] \subseteq [x_{cla}]$. A parametrização do sistema intervalar é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} w(1,1) & \dots & w(1,n) \\ & \ddots & \\ w(n,1) & \dots & w(n,n) \end{pmatrix}.$$

A metodologia proposta pode ser aplicada para resolver sistemas de equações lineares intervalares que representam modelagens de sistemas reais, tais como circuitos elétricos, nos quais a maioria dos componentes possui um valor nominal e uma tolerância associada. O exemplo a seguir mostra como o Teorema 3.2.1 pode ser utilizado para resolver um circuito elétrico contendo componentes com incertezas.

Exemplo 3.2.2. Considere o circuito elétrico mostrado na Figura 1

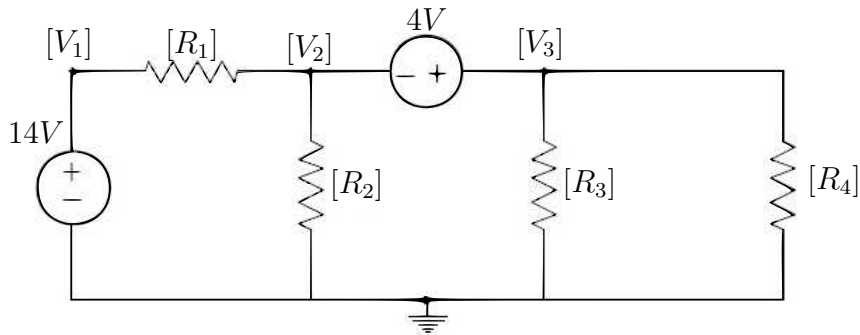


Figura 1 – Circuito Elétrico

No circuito, os resistores possuem um valor central nominal e tolerâncias de 15%. Objetiva-se encontrar as correntes e tensões que percorrem o circuito. A Tabela 2 mostra os valores nominais dos resistores. Eles representam o valor central de cada resistência intervalar.

Tabela 2 – Valores Nominais dos Resistores

Resistor	Valor Nominal
R_{1_c}	4Ω
R_{2_c}	2Ω
R_{3_c}	12Ω
R_{4_c}	4Ω

Sendo assim, a partir das leis de Kirchhoff é possível obter a matriz $[\mathbf{A}]$ e o vetor $[\mathbf{b}]$ do sistema linear intervalar que representa o circuito.

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [R_1] & [R_2] & 0 & 0 \\ 0 & [-R_2] & [R_3] & 0 \\ 0 & 0 & [-R_3] & [R_4] \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad [\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor que parametriza este sistema é dado por $[\mathbf{p}]^T = [1 \ [R_1] \ [R_2] \ [R_3] \ [R_4]]$. Resolvendo-se o sistema através do Teorema 3.2.1, obtém-se as correntes

$$[\mathbf{I}_{out}] = \begin{bmatrix} [2,3530; 3,6470] \\ [0,3396; 1,6604] \\ [0,3111; 0,6889] \\ [0,9092; 2,0908] \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se através da análise intervalar clássica, obtém-se

$$[\mathbf{I}_{cla}] = \begin{bmatrix} [2,1188; 3,8812] \\ [0,0329; 1,9671] \\ [0,2773; 0,7227] \\ [0,4455; 2,5545] \end{bmatrix}.$$

Este exemplo ilustra a redução do conservadorismo quando o tratamento das multi-incidências de parâmetros é utilizado. Nota-se que o raio da solução \mathbf{I}_{out} , representado por δ_{out} é significativamente menor do que o raio da solução \mathbf{I}_{cla} , representado por δ_{cla}

$$[\delta_{out}] = \begin{bmatrix} 0,6469 \\ 0,6603 \\ 0,1889 \\ 0,5908 \end{bmatrix} \quad e \quad [\delta_{cla}] = \begin{bmatrix} 0,8811 \\ 0,9671 \\ 0,2226 \\ 1,0544 \end{bmatrix}.$$

Para evitar esta representação e tornar a implementação computacional mais simples, uma nova representação do sistema foi proposta (POPOVA; KRÄMER, 2007).

Considere o sistema parametrizado $\mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{p})$ representado como

$$\left(\mathbf{A}^{(0)} + \sum_{\nu=1}^k p_{\nu} \mathbf{A}^{(\nu)} \right) \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(0)} + \sum_{\nu=1}^k p_{\nu} \mathbf{b}^{(\nu)}, \quad \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \in \mathbb{IR}^k, \quad (3.7)$$

com $\mathbf{A}^{(0)} := (a_{ij}^{(0)}), \dots, \mathbf{A}^{(k)} := (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{b}^{(0)} := (b_i^{(0)}), \dots, \mathbf{b}^{(k)} := (b_i^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$. Quando os parâmetros $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ variam dentro do intervalo $[\mathbf{p}] \in \mathbb{IR}^k$, o conjunto-solução do sistema parametrizado é dado por:

$$\Sigma^P = \Sigma(\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{b}(\mathbf{p}), [\mathbf{p}]) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{p}) \text{ para algum } \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]\}. \quad (3.8)$$

Para um conjunto não vazio e limitado $\Sigma^P \subseteq \mathbb{R}^n$, define-se a casca intervalar $\diamond : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{IR}^n$ por $\diamond(\Sigma) := [\inf \Sigma, \sup \Sigma]$. Deve-se determinar $[\mathbf{y}] \in \mathbb{IR}^n$ tal que $[\mathbf{y}] \supseteq \diamond(\Sigma^P) \supseteq \Sigma^P$.

O método de solução baseado em algoritmo de ponto-fixo utilizado por Rump (1994) para encontrar a solução de sistemas lineares intervalares requer regularidade forte da matriz intervalar não parametrizada. Uma generalização do Teorema 3.2.1 é realizada considerando matrizes parametrizadas fortemente regulares.

Teorema 3.2.2. *Considere o sistema intervalar parametrizado (3.7). Seja $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[\mathbf{Y}] \in \mathbb{IR}^n$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, e defina $[\mathbf{Z}] \in \mathbb{IR}^n$ e $\mathbf{C}([\mathbf{p}]) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ como*

$$[\mathbf{Z}] := \mathbf{R}(\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{A}^{(0)}\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{\nu=1}^k [p_{\nu}](\mathbf{R}\mathbf{b}^{(\nu)} - \mathbf{R}\mathbf{A}^{(\nu)}\tilde{\mathbf{x}}),$$

$$[\mathbf{C}(\mathbf{p})] := \mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{A}^{(0)} - \sum_{\nu=1}^k [p_{\nu}](\mathbf{R}\mathbf{A}^{(\nu)}). \quad (3.9)$$

Inicialize $[\mathbf{U}] := [\mathbf{Y}]$ e defina $[\mathbf{V}]$ através do seguinte algoritmo de recursão para $i = 1, \dots, n$

$$[\mathbf{V}]_i := \{[\mathbf{Z}] + [\mathbf{C}(\mathbf{p})][\mathbf{U}]\}_i, \quad \mathbf{U}_i := V_i \text{ (atualização de } [\mathbf{U}]). \quad (3.10)$$

Se $[\mathbf{V}] \subsetneq [\mathbf{Y}]$, então \mathbf{R} e cada matriz $\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$ são regulares, e para cada $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$ a solução única $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p})\mathbf{b}(\mathbf{p})$ de (3.7) satisfaz $\hat{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{V}]$. Com $[\mathbf{D}] := [\mathbf{C}(\mathbf{p})][\mathbf{V}] \in \mathbb{IR}^n$ a seguinte estimativa interna de $\diamond(\Sigma^P)$ é verdadeira:

$$[\tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{Z}]^- + [\mathbf{D}]^+, \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{Z}]^+ + [\mathbf{D}]^-] \subseteq [\inf(\Sigma^P); \sup(\Sigma^P)].$$

Prova: (POPOVA; KRÄMER, 2007). ■

Para sistemas lineares com parâmetros intervalares, existe um conjunto completo de soluções (3.8), e então calculam-se aproximações externas intervalares, ou seja, vetores intervalares que garantidamente contém a casca intervalar do conjunto de soluções paramétricas, através da primeira parte do Teorema 3.2.2 e do Teorema 3.2.1, respectivamente. No entanto, é importante saber o quanto a aproximação externa intervalar superestima a casca intervalar do conjunto de soluções paramétricas, ou seja, qual é a qualidade da aproximação externa intervalar obtida. A quantidade de superestimação pode ser indicada por uma inclusão, que é uma aproximação interna da solução exata. Uma solução intervalar $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$ é chamada de solução interna componente-a-componente para algum conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ se

$$\inf_{\sigma \in \Sigma} \sigma_i \leq x_i^- \text{ e } x_i^+ \leq \sup_{\sigma \in \Sigma} \sigma_i, \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq n.$$

A inclusão $[\mathbf{V}] \subsetneq [\mathbf{Y}]$ junto com as equações (3.3)-(3.5) implicam que $\rho(|[\mathbf{C}]|) < 1$, de acordo com a Proposição (2.5.1). Consequentemente, a não singularidade de \mathbf{R} e de cada matriz $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$ é provada, assim como a unicidade da solução do sistema linear intervalar. Entretanto, para algumas matrizes nas quais a condição $\rho(|[\mathbf{C}]|) < 1$ falha, verifica-se que \mathbf{R} e cada $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$ são não singulares. Isto mostra que para se obter uma condição melhor para a não singularidade de $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$, ao invés de utilizar a equação (3.4), deve-se utilizar a equação (3.9) (POPOVA; KRÄMER, 2003).

Exemplo 3.2.3. (POPOVA; KRÄMER, 2003) Considere o sistema linear parametrizado $n \times n$, $\mathbf{Q}(2, [\mathbf{p}])\mathbf{x} = \mathbf{b}([\mathbf{p}])$, onde para $i, j = 1, \dots, n$

$$q_{ij} := \begin{cases} [p_j], & \text{se } i \leq j, \\ 0, & \text{se } i = j + 2, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad \mathbf{b}([\mathbf{p}]) = ([p_1], \dots, [p_n])^T, \quad [p_i] \in [(i+1) \pm 10\%].$$

Considerando $n = 4$, observa-se que ao calcular a matriz $[\mathbf{C}]$ utilizando a expressão (3.4) não é possível encontrar uma solução, pois $\rho(|[\mathbf{C}]|) > 1$, e portanto o sistema $(\mathbf{I} - [\mathbf{C}])[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Z}]$ não terá solução. Entretanto, se calcularmos $[\mathbf{C}(\mathbf{p})]$ através da equação (3.9), obtemos

$$\mathbf{x}_{inn} = \begin{bmatrix} [-1,5244, -0,4756] \\ [-0,4727, 0,4727] \\ [-1,2352, -0,0981] \\ [1,1893, 1,4773] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{out} = \begin{bmatrix} [-1,8782, -0,1218] \\ [-0,9298, 0,9298] \\ [-1,8121, 0,4787] \\ [0,9208, 1,7459] \end{bmatrix}.$$

Este exemplo mostra a importância de determinar uma aproximação externa com menor conservadorismo, para garantir a existência de solução e que esta tenha o menor raio possível. O objetivo é obter uma melhor aproximação intervalar, ou seja, uma solução de menor raio para o sistema.

Outro fator preponderante para a redução do conservadorismo da solução é a escolha de $[\mathbf{y}]$ no Teorema 3.2.1. Uma escolha adequada de $[\mathbf{y}]$ reduz o conservadorismo da solução, pois pode melhorar a análise da condição de regularidade imposta no teorema, ou seja, a condição $[\mathbf{v}] \subsetneq [\mathbf{y}]$.

3.3 Conclusão

Neste Capítulo 3, foram apresentadas metodologias para realizar o tratamento de multi-incidências na solução de sistemas lineares intervalares. Foram discutidas diferentes maneiras de implementação computacional com vistas a obter resultados menos conservadores. Estas metodologias serão utilizadas na análise de estabilidade e no controle robustos de sistemas lineares intervalares nos próximos capítulos desta Tese.

4 Estabilidade Robusta

Este Capítulo 4 apresenta uma metodologia baseada em Análise Intervalar para a análise de estabilidade assintótica de sistemas lineares autônomos intervalares. A metodologia é uma extensão do *Teorema de Lyapunov* para sistemas intervalares. São apresentados métodos de resolução da equação de Lyapunov intervalar baseados em análise intervalar clássica, análise intervalar com tratamento das multi-incidências e em LMIs. Para resolver a equação de Lyapunov intervalar através de métodos intervalares, é necessário transformá-la em um sistema de equações lineares intervalares. Dois métodos que realizam esta transformação são apresentados. Os casos contínuo e discreto no tempo são considerados. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados obtidos.

4.1 Equação de Lyapunov Intervalar

O sistema linear e invariante no tempo autônomo intervalar $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$, $[\mathbf{A}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é assintoticamente estável se todos os autovalores de cada matriz $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ possuem partes reais negativas. Considere a seguinte extensão do Teorema de Lyapunov (SEIF *et al.*, 1994).

Teorema 4.1.1. *O sistema $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$ é assintoticamente estável se para qualquer $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e para qualquer matriz intervalar simétrica definida positiva $\mathbf{Q} \in [\mathbf{Q}]$, existe uma única solução definida positiva para a Equação de Lyapunov*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (4.1)$$

■

Uma matriz quadrada intervalar $[\mathbf{P}]$ é simétrica se os elementos intervalares $[p_{ij}]$ e $[p_{ji}]$ são iguais para todo i e j . Uma matriz intervalar simétrica $[\mathbf{P}]$ é definida positiva se todos os autovalores de cada $\mathbf{P} \in [\mathbf{P}]$ forem positivos. Para realizar a análise de positividade de uma matriz quadrada intervalar $[\mathbf{A}]$ utilizaremos o Teorema 2.6.2, apresentado no Capítulo 2.

4.2 Tratamento de Multi-incidências

Sistemas lineares intervalares na forma $[\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]$ podem conter parâmetros que aparecem múltiplas vezes tanto na matriz $[\mathbf{A}]$ quanto no vetor $[\mathbf{b}]$. Os métodos clássicos de solução não consideram a existência das multi-incidências, levando a resultados muito conservadores.

Utilizando o método para o tratamento de multi-incidências proposto por (RUMP, 1994), pode-se representar o sistema intervalar de forma a tornar os parâmetros dependentes através da criação de um vetor que contém todas as multi-incidências do sistema. Através deste vetor, θ , é possível descrever totalmente a matriz $[A]$ e o vetor $[b]$, de forma que todos os parâmetros iguais sejam dependentes de θ . O Capítulo 3 abordou esta metodologia e apresentou os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 que serão utilizados para realizar a análise de estabilidade proposta neste Capítulo 4.

Para realizar a análise de estabilidade de sistemas incertos contendo parâmetros intervalares multi-incidentes através da equação de Lyapunov intervalar, é necessário transformá-la em um sistema linear de equações intervalares do tipo $[A][x] = [b]$. Esta transformação pode ser realizada através de dois métodos, descritos a seguir.

4.2.1 Transformação da equação de Lyapunov através do produto de Kronecker

A equação de Lyapunov intervalar é um caso particular da equação de Sylvester intervalar. O Teorema 4.2.1 a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para a solução da equação de Sylvester intervalar. Através desta condição é possível inferir a solução da equação de Lyapunov intervalar.

Teorema 4.2.1. *Uma condição necessária e suficiente para que a equação de Sylvester intervalar,*

$$[A][P] + [P][B]^T = -[Q], \quad (4.2)$$

com $[A] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $[B] \in \mathbb{IR}^{m \times m}$, $[Q]$ e $[P] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$, tenha solução para todo $Q \in [Q]$ é que $0 \notin [\lambda_i] + [\mu_j]$, quaisquer que sejam i, j , com $[\lambda_i] = \{\lambda : Ay_A = \lambda y_A, A \in [A], y_A \neq 0\}$ e $[\mu_j] = \{\mu : By_B = \mu y_B, B \in [B], y_B \neq 0\}$ denotando os espectros de $[A]$ e $[B]$, respectivamente.

Prova: Ver (SEIF *et al.*, 1994). ■

Como em (SEIF *et al.*, 1994), a equação intervalar $[A][P] + [P][B] = [Q]$ pode ser escrita na forma equivalente

$$[G][p] = [q], \quad (4.3)$$

com

$$\begin{aligned} [G] &= ([A] \otimes I_n) + (I_m \otimes [B]^T), \\ p &= \text{vec}(P) = (P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1m}, \dots, P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nm})^T, \\ q &= \text{vec}([Q]) = ([Q_{11}], [Q_{12}], \dots, [Q_{1m}], \dots, [Q_{n1}], [Q_{n2}], \dots, [Q_{nm}])^T. \end{aligned}$$

O produto de Kronecker $[W] \otimes [Z]$ entre duas matrizes intervalares, resulta em uma matriz intervalar cujo bloco (i, j) é dado por $[w_{ij}][Z]$, com $[w_{ij}]$ representando o

elemento i, j da matriz $[\mathbf{W}]$. A solução da equação de Sylvester intervalar (4.2) pode ser obtida através da solução de um sistema linear intervalar na forma

$$\left(([\mathbf{A}] \otimes \mathbf{I}_n) + (\mathbf{I}_m \otimes [\mathbf{B}]^T) \right) \mathbf{x} = [\mathbf{q}]. \quad (4.4)$$

Caso as condições do Teorema 4.2.1 sejam satisfeitas, o tratamento de multi-incidências pode ser aplicado à equação (4.4), proporcionando raios menores para a solução $[\mathbf{P}]$ da equação (4.1). Neste caso, obtém-se um sistema equivalente $[\mathbf{G}][\mathbf{p}] = [\mathbf{q}]$ com

$$[\mathbf{G}] = ([\mathbf{A}]^T \otimes \mathbf{I}_n) + (\mathbf{I}_n \otimes [\mathbf{A}]^T),$$

$$\mathbf{p} = \text{vec}(\mathbf{P}) = (P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}, \dots, P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nn})^T,$$

$$[\mathbf{q}] = \text{vec}([\mathbf{Q}]) = ([Q_{11}], [Q_{12}], \dots, [Q_{1n}], \dots, [Q_{n1}], [Q_{n2}], \dots, [Q_{nn}])^T.$$

A ordem do sistema equivalente obtido através deste método é n^2 .

4.2.2 Transformação da equação de Lyapunov utilizando o método proposto por Bingulac (1970)

Por este método, a equação de Lyapunov é transformada em um sistema reduzido de equações lineares. A ordem do sistema equivalente é $n(n+1)/2$. A ordem do sistema é menor e experiências numéricas mostram que o conservadorismo das soluções diminui significativamente.

No artigo de Bingulac (1970), a proposta é transformar a equação

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (4.5)$$

em um sistema de $m = n(n+1)/2$ equações algébricas lineares na forma

$$\mathbf{U} \mathbf{P}_v = -\mathbf{R}_v, \quad (4.6)$$

onde o vetor $\mathbf{P}_v = \{p_t\}$, t -dimensional, é dado por

$$\mathbf{P}_v = \{p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n}, p_{22}, p_{23}, \dots, p_{2n}, p_{33}, \dots, p_{(n-1)(n-1)}, p_{(n-1)n}, p_{nn}\},$$

enquanto que os elementos r_t da matriz t -dimensional $\mathbf{R}_v = \{r_t\}$ correspondem à diagonal superior da matriz dada \mathbf{Q} , da mesma maneira que \mathbf{P}_v corresponde a \mathbf{P} , ou seja:

$$\mathbf{R}_v = \{q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}, q_{22}, q_{23}, \dots, q_{2n}, q_{33}, \dots, q_{(n-1)(n-1)}, q_{(n-1)n}, q_{nn}\}.$$

A matriz $\mathbf{U} = \{u_{st}\}$ é uma matriz $t \times t$ dependente dos elementos a_{ij} da matriz \mathbf{A} do sistema dado. A matriz \mathbf{U} pode ser obtida pelo algoritmo composto pelos três passos a seguir:

Passo 1: Construa a matriz simétrica \mathbf{L} , $n \times n$, dada por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 2 & n+1 & n+2 & \cdots & \cdots & 2n-1 \\ 3 & n+2 & 2n & 2n+1 & \cdots & 3n-3 \\ 4 & n+3 & 2n+1 & 3n-2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & m-2 & m-1 \\ n & 2n-1 & 3n-3 & \cdots & m-1 & m \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Em particular, para os casos em que $n = 3$ e $n = 4$, as matrizes \mathbf{L} serão dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Construa a matriz $\mathbf{V} = \{v_{st}\}$ $m \times m$ aplicando

$$v_{st} = a_{ji} \quad (4.8)$$

onde os índices s e t ($s, t = 1, 2, \dots, m$) são dados pelos seguintes elementos da matriz auxiliar \mathbf{L} :

$$s = L_{ik}, \quad t = L_{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Passo 3: A matriz \mathbf{U} pode ser obtida multiplicando por 2 todos os elementos da matriz \mathbf{V} cujos índices correspondam aos elementos da diagonal da matriz \mathbf{L} . Estes índices são: $1, n+1, 2n, 3n-2, \dots, m-2, m$. A Tabela 3 mostra as dependências $s = s(i, j, k)$ e $t = t(i, j, k)$ para o caso $n = 3$, $m = 6$. É importante notar que na Tabela 3, duas linhas denotadas por A , ($i = 1, j = 1, k = 2$) e ($i = 2, j = 2, k = 1$), levam ao mesmo par de $s = 2$ e $t = 2$. Neste caso, de acordo com a relação (4.8), o elemento v_{22} deve ser calculado por $v_{22} = a_{11} + a_{22}$. O mesmo se aplica aos casos mostrados na Tabela 3 como B e C .

Tabela 3 – Caso $n = 3$

i	j	k	s	t	
1	1	1	1	1	
		2	2	2	A
		3	3	3	B
	2	1	1	2	
		2	2	4	
		3	3	5	
	3	1	1	3	
		2	2	5	
		3	3	6	
	1	1	2	1	
		2	4	2	
		3	5	3	
2	2	1	2	2	A
		2	4	4	
		3	5	5	C
	3	1	2	3	
		2	4	5	
		3	5	6	
	1	1	3	1	
		2	5	2	
		3	6	3	
	2	1	3	2	
		2	5	4	
		3	6	5	
3	3	1	3	3	B
		2	5	5	C
		3	6	6	

Esta transformação torna a ordem do sistema equivalente igual a $m = n(n + 1)/2$. Comparada à transformação através do produto de Kronecker, a ordem do sistema equivalente neste caso é menor e experimentos numéricos mostram que o conservadorismo da solução decresce significativamente.

Então, para realizar a análise de estabilidade, deve-se resolver o sistema equivalente $[\mathbf{G}][\mathbf{p}] = [\mathbf{q}]$ utilizando-se o Teorema 3.2.1 e realizar a análise da positividade da solução através do Teorema 2.6.2, de acordo com o Algoritmo a seguir.

Algoritmo 4.2.1. (FAZZOLARI; FERREIRA, 2015)

Dados: $[\mathbf{G}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $[\mathbf{q}] \in \mathbb{R}^m$ e $[\boldsymbol{\theta}] \in \mathbb{R}^k$.

Passo 0: Definem-se os vetores $\mathbf{w}(i,j)$ e $\mathbf{w}(0,j)$; calcula-se $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{G}_c^{-1}\mathbf{q}_c$; $\mathbf{R} = \mathbf{G}_c^{-1}$; \mathbf{C} através da expressão (3.4); aplica-se o Teorema 3.2.1;

Passo 1: Obtém-se $[\mathbf{v}]$ a partir da recursão (3.5) e verifica-se se $[\mathbf{v}] \subseteq [\mathbf{y}]$. Se isto ocorrer, a solução externa do sistema $[\mathbf{G}][\mathbf{p}] = [\mathbf{q}]$ é $[\mathbf{p}_{out}] = \tilde{\mathbf{p}} + [\mathbf{v}]$.

Passo 2: Verifica-se a positividade de $[\mathbf{P}_{out}]$ a partir do Teorema 2.6.2. ■

Conforme discutido no Capítulo 3, para se obter uma condição melhor para a regularidade de $\mathbf{G}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$, ao invés de utilizar (3.4), deve-se utilizar (3.9) para calcular a matriz $[\mathbf{C}]$. Logo, o Algoritmo 4.2.1 pode ser modificado para incluir o cálculo da matriz $[\mathbf{C}]$ através de (3.9), quando necessário.

Algoritmo 4.2.2. *Dados:* $[\mathbf{G}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $[\mathbf{q}] \in \mathbb{R}^m$ e $[\boldsymbol{\theta}] \in \mathbb{R}^k$.

Passo 0: *Definem-se os vetores $\mathbf{w}(i,j)$ e $\mathbf{w}(0,j)$; calcula-se $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{G}_c^{-1} \mathbf{q}_c$; $\mathbf{R} = \mathbf{G}_c^{-1}$; $[\mathbf{C}]$ através de (3.4); aplica-se o Teorema 3.2.1;*

Passo 1: *Obtém-se $[\mathbf{v}]$ a partir da recursão (3.5) e verifica-se se $[\mathbf{v}] \subsetneq [\mathbf{y}]$. Se isto ocorrer, $[\mathbf{p}_{out}] = \tilde{\mathbf{p}} + [\mathbf{v}]$;*

Passo 2: *Se a condição do Passo 1 não for satisfeita, calcula-se $[\mathbf{C}]$ através de (3.9) e retorna-se ao Passo 1; A solução será $[\mathbf{p}_{out}] = \tilde{\mathbf{p}} + [\mathbf{v}]$;*

Passo 3: *Verifica-se a positividade de $[\mathbf{P}_{out}]$ do sistema a partir do Teorema 2.6.2. ■*

Considerando-se somente o Teorema 3.2.2, o seguinte Algoritmo deve ser utilizado.

Algoritmo 4.2.3. *Dados:* $[\mathbf{G}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $[\mathbf{q}] \in \mathbb{R}^m$ e $[\boldsymbol{\theta}] \in \mathbb{R}^k$.

Passo 0: *Definem-se as matrizes $\mathbf{G}^{(0)}, \dots, \mathbf{G}^{(k)}$ e os vetores $\mathbf{q}^{(0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k)}$; calcula-se $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{G}_c^{-1} \mathbf{q}_c$; $\mathbf{R} = \mathbf{G}_c^{-1}$; $[\mathbf{C}] = \mathbf{I} - \mathbf{R}[\mathbf{G}]$; aplica-se o Teorema 3.2.2;*

Passo 1: *Obtém-se $[\mathbf{v}]$ a partir da recursão (3.10) e verifica-se se $[\mathbf{v}] \subsetneq [\mathbf{y}]$. Se isto ocorrer, então a solução externa será $[\mathbf{p}_{out}] = \tilde{\mathbf{p}} + [\mathbf{v}]$.*

Passo 2: *Verifica-se a positividade de $[\mathbf{P}_{out}]$ a partir do Teorema 2.6.2. ■*

4.3 Estabilidade Robusta com LMIs

Considere o sistema linear invariante no tempo incerto descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\delta})\mathbf{x}(t), \quad (4.9)$$

com $\mathbf{A}(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{i=1}^k \delta_i \mathbf{A}_i$, $\boldsymbol{\delta} \in \Lambda_k$, onde $\Lambda_k = \{\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k \delta_i = 1, \delta_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}$ é o simplex unitário.

Teorema 4.3.1. *(Estabilidade Quadrática) O sistema (4.9) é estável para todo $\boldsymbol{\delta} \in \Lambda_k$ se existir uma matriz $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ tal que $\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < 0$, $i = 1, \dots, k$.*

Prova: Ver Barmish (1985). ■

Para uma classe específica de sistemas com parâmetros incertos e afins, pode-se estabelecer critérios a partir de desigualdades de Lyapunov dependentes de parâmetros. Considere um sistema incerto linear e invariante no tempo descrito por (4.9) com $\mathbf{A}(\boldsymbol{\delta})$ dependente de maneira afim de $\boldsymbol{\delta}$, na forma

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{C}, \quad (4.10)$$

com $\boldsymbol{\Delta} = \text{diag}[\delta_1 \mathbf{I}_{n_1}, \dots, \delta_N \mathbf{I}_{n_N}]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_N] \in \mathbb{R}^{n \times s}$, $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1^T \dots \mathbf{C}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{s \times n}$, onde $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times n_i}$, $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e $s = \sum_{i=1}^N n_i$; \mathbf{I}_s é a matriz identidade de ordem s . O vetor de parâmetros reais $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \dots \delta_N]^T$ é incerto, mas constante no tempo e satisfaz

$$|\delta_i| \leq \gamma, i = 1, \dots, N. \quad (4.11)$$

O sistema (4.9) é quadraticamente e afim estável (AQS) se existirem matrizes simétricas \mathbf{P}_0 e $\boldsymbol{\Psi}$ tais que, para todo δ_i satisfazendo (4.11),

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\delta}) := \mathbf{P}_0 + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{C} > 0 \quad (4.12)$$

e

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\delta}) \mathbf{A}(\boldsymbol{\delta}) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\delta})^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\delta}) < 0, \quad (4.13)$$

onde

$$\boldsymbol{\Psi} = \text{diag}[\boldsymbol{\Psi}_1, \dots, \boldsymbol{\Psi}_N], \quad \boldsymbol{\Psi}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.14)$$

O problema de estabilidade quadrática afim pode ser resolvido como segue. Nos Lemas e Teoremas a seguir (YANG; LUM, 2007), considere que o conjunto de vértices do hipercubo descrito por (4.11) é denotado por $\boldsymbol{\delta}_v$, ou seja,

$$\boldsymbol{\delta}_v = \{[\delta_1 \dots \delta_N]^T : \delta_i \in \{-\gamma; \gamma\}, \quad i = 1, \dots, N\}. \quad (4.15)$$

Lema 4.3.1. *Considere o sistema incerto dado por (4.9) e $\mathbf{P}(\boldsymbol{\delta})$ dada por (4.12). Assuma que \mathbf{A}_0 é Hurwitz. Então o sistema (4.9) é AQS se uma das condições de estabilidade robusta a seguir forem obedecidas:*

(i) *Existem matrizes simétricas \mathbf{P}_0 , $\boldsymbol{\Psi}$ na forma (4.14) e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ com $\mathbf{V}_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ e $\mathbf{V}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$,*

$$\mathbf{V}_{ii} \leq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.16)$$

e matrizes \mathbf{W} e \mathbf{Z} tais que

$$M_2(\Delta) := \begin{bmatrix} P(\delta)A_0 + A_0^T P(\delta) & P(\delta)B \\ B^T P(\delta) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}^T \quad (4.17)$$

$$\times \Theta(\Delta) \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0 \text{ para todo } \delta \in \delta_v,$$

com

$$\Theta(\Delta) = \begin{bmatrix} -(\Delta^T V \Delta + \Delta^T W + W^T \Delta) & W^T + \Delta^T Z^T \\ W + Z \Delta & V - Z - Z^T \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

(ii) Existem matrizes simétricas P_0, Ψ na forma (4.14) e $S = \text{diag}[S_1, \dots, S_N]$ com $S_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, e uma matriz anti-simétrica $T_s = \text{diag}[T_{s1}, \dots, T_{sN}]$ com $T_{si} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ tais que $S > 0$ e

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_0 \\ \Psi C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & B \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} P_0 \\ \Psi C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & B \end{bmatrix} \right)^T \\ & + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma^2 S & -T_s \\ T_s & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

■

Lema 4.3.2. (IWASAKI; SHIBATA, 2001) O sistema (4.9) é AQS se A_0 é Hurwitz e existem matrizes simétricas $P \in \mathbb{R}^{(n+s) \times (n+s)}$ e $\Theta_L \in \mathbb{R}^{4s \times 4s}$ tais que as seguintes LMIs são satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \\ \bar{I} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & P \\ 0 & \Theta_L & 0 \\ P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \\ \bar{I} & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} I \\ \text{diag}[\Delta, \Delta] \end{bmatrix}^T \Theta_L \begin{bmatrix} I \\ \text{diag}[\Delta, \Delta] \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{para todo } \delta \in \delta_v \quad (4.21)$$

$$\Theta_{L22ii} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.22)$$

onde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ CA_0 & CB \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Theta_L = \text{diag}[U, U]^T \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{L11} & \bar{\theta}_{L12} \\ \bar{\theta}_{L12}^T & \bar{\theta}_{L22} \end{bmatrix} \text{diag}[U, U],$$

com \mathbf{U} uma matriz ortogonal tal que $\mathbf{U} \text{diag}[\mathbf{\Delta}, \mathbf{\Delta}] \mathbf{U}^T = \text{diag}[\delta_1 \mathbf{I}_{2n_1}, \dots, \delta_N \mathbf{I}_{2n_N}]$, $\mathbf{\Theta}_{L11} \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ e $\mathbf{\Theta}_{L22ii} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}$, ($i = 1, \dots, N$), sendo blocos de matrizes na diagonal de $\mathbf{\Theta}_{L22}$. ■

Teorema 4.3.2. *O sistema (4.9) é AQS se \mathbf{A}_0 é Hurwitz e existem matrizes simétricas \mathbf{P}_0 e $\mathbf{\Psi}$ na forma (4.14), e uma matriz simétrica $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{R}^{2s \times 2s}$ dada por*

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Theta}_{11} & \mathbf{\Theta}_{12} \\ \mathbf{\Theta}_{12}^T & \mathbf{\Theta}_{22} \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{\Theta}_{11} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ e $\mathbf{\Theta}_{22ii} \leq 0$, $i = 1, \dots, N$, tais que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{\Psi} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{\Psi} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right)^T \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_s \end{bmatrix}^T \mathbf{\Theta} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_s \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

seja satisfeita e, além disso,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{\Delta} \end{bmatrix}^T \mathbf{\Theta} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{\Delta} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{para todo } \delta \in \delta_v,$$

com $\mathbf{\Theta}_{22ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ($i = 1, \dots, N$) blocos de matrizes na diagonal de $\mathbf{\Theta}_{22}$.

Prova: Ver (YANG; LUM, 2007). ■

A aplicação do método proposto ao realizar a análise de estabilidade robusta de sistemas intervalares com tratamento de multi-incidências é realizada por meio dos exemplos a seguir.

Exemplo 4.3.1. *Considere o sistema linear e invariante no tempo incerto descrito por (4.9)-(4.11) com*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -10 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Delta} = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \delta_3 \mathbf{I}_2].$$

Objetiva-se encontrar o máximo valor de γ tal que o sistema seja AQS. Para tanto, utilizou-se um computador Dell com sistema operacional Windows 7 Professional 64 bits, processador Intel Core I7-2630QM, com clock de 2GHz e memória de 6GB. Os

Tabela 4 – Máximos Raios de Incerteza

Método	γ
Teorema 4.3.1 (EQ)	2,5415
Lema 4.3.1 (i)	2,9107
Lema 4.3.1 (ii)	2,8767
Lema 4.3.2	2,9968
Teorema 4.3.2	2,9409

programas foram implementados no Matlab 7.12.0.635 (R2011a) e os resultados estão listados na Tabela 4.

Considerando a metodologia proposta que utiliza a equação de Lyapunov intervalar, realizando a transformação do sistema através do método proposto por Bingulac (1970), obteve-se um máximo raio de incerteza $\gamma = 0,4253$ por meio da aproximação externa. ■

O resultado da análise de estabilidade por LMIs é muito menos conservador, visto que foi encontrado um maior raio de incerteza que ainda manteve o sistema estável, o que significa que mesmo diante de incertezas de maior raio, a estabilidade pode ser mantida. Entretanto, a matriz de Lyapunov encontrada é dependente do parâmetro δ , que na prática é desconhecido. Sendo assim, o problema resolvido através das LMIs é um problema de existência, ou seja, assegura a existência de uma matriz de Lyapunov, porém, não é possível conhecê-la, uma vez que depende do parâmetro incerto δ . Já pela análise intervalar, uma solução $[P]$ para a equação de Lyapunov intervalar é determinada, e se $[P]$ for definida positiva, o sistema é AQS. Este fato torna a solução mais conservadora, uma vez que não há dependência de δ na matriz de Lyapunov envolvida.

Outra limitação da análise por LMIs é o fato de que o sistema deve ser descrito em um formato específico, dado por (4.10), com A_0 necessariamente Hurwitz. Isto gera uma limitação para a gama de problemas analisados, que não existe no método proposto nem no método da estabilidade quadrática.

Exemplo 4.3.2. Considere o sistema massa-mola-atrito da Figura 2.

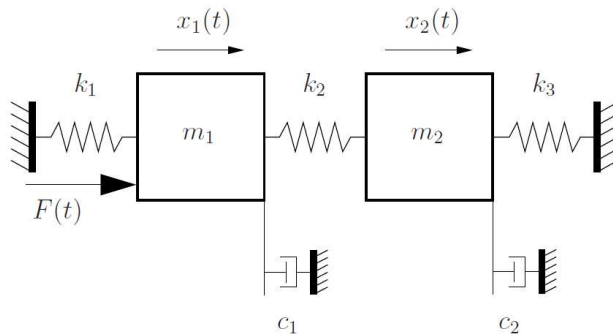


Figura 2 – Sistema massa-mola-atrito.

Uma realização no espaço de estados para este sistema é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-([k_1]+[k_2])}{m_1} & \frac{-[c_1]}{m_1} & \frac{[k_2]}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{[k_2]}{m_2} & 0 & \frac{-([k_2]+[k_3])}{m_2} & \frac{-[c_2]}{m_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t).$$

Os parâmetros precisamente conhecidos da planta são $m_1 = 2,77\text{kg}$, $m_2 = 2,59\text{kg}$. Os parâmetros intervalares são definidos a partir de um valor central e de um raio de incerteza. Os valores centrais dos parâmetros são dados por: $k_{1c} = 200\text{N/m}$, $k_{2c} = 390\text{N/m}$, $k_{3c} = 30\text{N/m}$, $c_{1c} = 1,2\text{N.s/m}$ e $c_{2c} = 0,2\text{N.s/m}$.

Objetiva-se encontrar o máximo raio de incerteza que ainda mantém o sistema estável. O sistema intervalar será estável se a solução da seguinte equação de Lyapunov intervalar for uma matriz intervalar simétrica definida positiva: $[\mathbf{A}][\mathbf{P}] + [\mathbf{P}][\mathbf{A}]^T = -[\mathbf{C}]$, onde $[\mathbf{C}]$ é a matriz intervalar degenerada $[\mathbf{C}] = \mathbf{C} = \mathbf{I}$ e $[\mathbf{A}]$ a matriz de estados intervalar do sistema. O método proposto em Bingulac (1970) foi utilizado para transformar a equação de Lyapunov em um sistema de equações algébricas, o qual foi resolvido utilizando-se os Algoritmos 4.2.2 e 4.2.3. O maior raio de incerteza conseguido foi de 5,2% do valor central, resultando em

$$[\mathbf{P}_{\text{multi}}] = \begin{bmatrix} [340,69; 447,26] & [0,33; 0,44] & [-284,90; -202,09] & [0,46; 0,62] \\ [0,33; 0,44] & [1,83; 2,25] & [-0,44; -0,37] & [0,12; 0,42] \\ [-284,90; -202,09] & [-0,44; -0,37] & [238,2918; 334,2743] & [-0,37; -0,32] \\ [0,46; 0,62] & [0,12; 0,42] & [-0,37; -0,32] & [1,72; 2,28] \end{bmatrix}$$

em um tempo computacional de 0,100s. Para este raio de incerteza não foi possível encontrar uma solução através de análise intervalar clássica, pois esta não considera a multi-incidência de parâmetros intervalares, tornando a solução muito conservadora. Não é possível realizar a análise de estabilidade do sistema utilizando-se a estabilidade quadrática-afim, pois, descrevendo o sistema na forma (4.10),

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{m_1} & \frac{-1}{m_1} & 0 & \frac{-1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & \frac{-1}{m_2} & 0 & \frac{-1}{m_2} \end{bmatrix}, \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} [k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [k_3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [c_1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [c_2] \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz \mathbf{A}_0 obtida não é Hurwitz e, portanto, não é possível realizar a análise de estabilidade com os métodos que utilizam funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Através da estabilidade quadrática, garante-se a estabilidade do sistema incerto para raios de incerteza de até 1,54% do valor nominal utilizando um tempo computacional de 0,652s. Além de mais conservador, o resultado foi obtido com um tempo computacional superior ao necessário pelo tratamento de multi-incidências.

O número de parâmetros intervalares existentes no sistema interfere no conservadorismo da solução, porém mesmo para um número menor de parâmetros intervalares, a estabilidade quadrática apresenta maior conservadorismo do que a solução baseada em análise intervalar com tratamento de multi-incidências. A Tabela 5 mostra a porcentagem dos raios de incerteza máximos relativos ao valor nominal, para estabilidade quadrática e análise intervalar, considerando algumas combinações de parâmetros incertos do sistema massa-mola-atrito.

Tabela 5 – Variação do número de parâmetros intervalares

Parâmetros Intervalares	Teorema 4.3.1	Algoritmo 4.2.2
$[k_1], [k_2], [k_3], [c_1]$ e $[c_2]$	1,54%	5,20%
$[k_1], [k_2], [c_1]$ e $[c_2]$	1,56%	5,31%
$[k_1]$ e $[c_1]$	4,56%	12,54%

■

Observa-se na Tabela 5 que quando não foi considerado o parâmetro $[k_2]$ na análise, o raio de incerteza cresce substancialmente. Isto ocorre, pois este parâmetro é multi-incidente já na descrição do sistema, ou seja na matriz $[\mathbf{A}]$. Sendo assim, quando é realizada a transformação da equação de Lyapunov em um sistema de equações lineares intervalares, este parâmetro aparecerá mais vezes do que os demais, o que mostra claramente a importância de realizar o tratamento das multi-incidências na solução de sistemas lineares intervalares.

O tempo necessário para encontrar uma solução para o problema de estabilidade robusta é uma característica importante e limitante das abordagens via LMIs, porque quanto maior a ordem do sistema e o número de parâmetros incertos, maior o número de LMIs requeridas, e o tempo computacional necessário para obter resultados. A metodologia proposta nesta Tese é relativamente menos sensível à ordem e ao número de parâmetros incertos do sistema. O esforço computacional relacionado à metodologia proposta é dominado pela resolução de um sistema de equações de ordem n , cuja complexidade é da ordem de n^3 quando o método de Gauss-Jordan é empregado.

Uma outra condição baseada em LMIs (OLIVEIRA; PERES, 2005) considera funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, e para esta condição não é necessário uma matriz \mathbf{A}_0 Hurwitz. O exemplo a seguir ilustra o aumento do tempo computacional de acordo com o aumento da ordem do sistema e o número de parâmetros intervalares.

Exemplo 4.3.3. Considere o sistema massa-mola-atrito da Figura 2. Objetiva-se encontrar o máximo raio de incerteza tal que o sistema ainda seja estável.

Para a nova condição LMI dada pelo Teorema 3 de Oliveira e Peres (2005), o maior valor para o raio de incerteza foi 99,99% do valor central, utilizando um tempo computacional de 228,434 segundos para montar as LMIs e 391,012 segundos para resolvê-las. ■

Apesar da solução de Oliveira e Peres (2005) ser menos conservadora, o tempo computacional é muito superior ao necessário para solucionar o sistema através da metodologia que utiliza análise intervalar. Esta condição é inerente aos métodos baseados em programação semi-definida.

4.4 Equação de Lyapunov Intervalar Discreta

A equação de Lyapunov discreta intervalar é relacionada a problemas de controle e estabilidade de sistemas discretos com incertezas, e tem a forma

$$[\mathbf{A}]^T[\mathbf{P}][\mathbf{A}] - [\mathbf{P}] = -[\mathbf{C}] \quad (4.24)$$

com $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{C}]$ e $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O conjunto solução da equação (4.24) pode ser caracterizado como

$$\begin{aligned} \Sigma_{lyap} = \{ & \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{C}, \text{ para alguma } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \\ & \text{alguma } \mathbf{B} \in [\mathbf{B}], \text{ alguma } \mathbf{C} \in [\mathbf{C}]\}. \end{aligned}$$

O sistema linear autônomo intervalar $\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}_d]\mathbf{x}(k)$ é assintoticamente estável se e somente se existir $[\mathbf{P}] = [\mathbf{P}]^T > 0$ tal que $[\mathbf{A}_d]^T[\mathbf{P}][\mathbf{A}_d] - [\mathbf{P}] = -[\mathbf{C}]$ com $[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}]^T > 0$. Para qualquer matriz $[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}]^T > 0$ a solução da equação de Lyapunov discreta é simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz $[\mathbf{A}_d]$ tiverem valor absoluto menor do que 1, e então $[\mathbf{A}_d]$ é assintoticamente estável. (BONATTI *et al.*, 2015)

Para transformar a equação (4.24) em um sistema de equações na forma $[\mathbf{G}][\mathbf{p}] = [\mathbf{c}]$, utiliza-se o produto de Kronecker.

4.4.1 Produto de Kronecker

Usando a propriedade $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \text{vec}(\mathbf{A})) \text{vec}(\mathbf{B})$, a equação (4.24) poderá ser escrita como $(\mathbf{I}_n - [\mathbf{A}] \otimes [\mathbf{A}]) \text{vec}([\mathbf{P}]) = \text{vec}([\mathbf{C}])$, com \mathbf{I}_n a matriz identidade de ordem n ,

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}] &= (\mathbf{I} - [\mathbf{A}] \otimes [\mathbf{A}]), \\ \mathbf{p} &= \text{vec}(\mathbf{P}) = (P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}, \dots, P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nn})^T, \\ [\mathbf{c}] &= \text{vec}([\mathbf{C}]) = ([C_{11}], [C_{12}], \dots, [C_{1n}], \dots, [C_{n1}], [C_{n2}], \dots, [C_{nn}])^T. \end{aligned}$$

A ordem do sistema equivalente obtido é n^2 .

Esta transformação resulta em termos não lineares, dependentes dos parâmetros intervalares, pois como $[\mathbf{G}] = (\mathbf{I} - [\mathbf{A}] \otimes [\mathbf{A}])$, surgem termos da multiplicação da matriz $[\mathbf{A}]$ por ela mesma. Uma solução para este problema será abordada na seção (4.5).

4.4.2 Método de Euler

Pode-se obter um sistema discretizado a partir de uma planta contínua através de um método de aproximação conhecido como método de Euler.

Considere o sistema linear autônomo contínuo no tempo intervalar $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. A derivada pode ser aproximada por

$$\frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \cong [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t)$$

sendo $\Delta t = T$ o período de amostragem. Para $t = kT$, obtém-se

$$\mathbf{x}((k+1)T) \cong (T[\mathbf{A}] + \mathbf{I})\mathbf{x}(kT)$$

Com $[\mathbf{A}_d] = (T[\mathbf{A}] + \mathbf{I})$, obtém-se $\mathbf{x}(k+1) \cong [\mathbf{A}_d]\mathbf{x}(k)$, que corresponde à expressão do sistema discreto no tempo intervalar.

4.5 Tratamento de Multi-incidências

Para realizar análise de estabilidade em sistemas discretos, utilizamos os teoremas propostos. Porém, devido a existência de termos não lineares quando da transformação da equação de Lyapunov discreta através do produto de Kronecker, alguns cuidados devem ser tomados. Para aplicar o Teorema 3.2.1, é necessário definir o vetor $[\boldsymbol{\theta}]$, contendo todos os parâmetros incertos do sistema $[\mathbf{G}][\mathbf{p}] = [\mathbf{c}]$.

Os termos não lineares que surgem na transformação podem ser tratados como novos parâmetros, incluindo assim termos no vetor $[\boldsymbol{\theta}]$ de forma que todos os parâmetros multi-incidentes tenham sido considerados. Segue um exemplo.

Exemplo 4.5.1. Considere o sistema linear discreto intervalar

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} [\theta_1] & [\theta_2] \\ [\theta_2] & [\theta_1] \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

com $[\theta_1], [\theta_2] \in \mathbb{IR}$ parâmetros intervalares. Para realizar a análise de estabilidade deste sistema, deve-se transformar a equação de Lyapunov discreta em um sistema de equações. Aplicando-se a técnica baseada no produto de Kronecker, a matriz $[\mathbf{G}]$ resultante contém termos não lineares. Para eliminar as não linearidades, substitui-se estes termos por novos parâmetros intervalares, relacionando-os. Para este exemplo, as relações são

$$[\theta_1]^2 = [a_1], \quad [\theta_2]^2 = [a_2], \quad [\theta_1][\theta_2] = [a_3],$$

obtendo-se, via operações intervalares, o vetor de parâmetros

$$[\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} 1 & [a_1] & [a_2] & [a_3] \end{bmatrix}^T.$$

Assim, a matriz intervalar $[\mathbf{G}]$ será dada por

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 - [a_1] & -[a_3] & -[a_3] & -[a_2] \\ -[a_3] & 1 - [a_1] & -[a_2] & -[a_3] \\ -[a_3] & -[a_2] & 1 - [a_1] & -[a_3] \\ -[a_2] & -[a_3] & -[a_3] & 1 - [a_1] \end{bmatrix}$$

Deste modo é possível aplicar o Teorema 3.2.1 para realizar a análise de estabilidade de sistemas discretos.

Exemplo 4.5.2. Considere o sistema massa-mola do Exemplo 4.3.2. O sistema foi discretizado utilizando-se o método de Euler, obtendo-se

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ \frac{-T([k_1] + [k_2])}{m_1} & 1 - \frac{T[c_1]}{m_1} & \frac{T[k_2]}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ \frac{T[k_2]}{m_2} & 0 & \frac{-T([k_2] + [k_3])}{m_2} & 1 - \frac{T[c_2]}{m_2} \end{bmatrix}$$

Objetiva-se encontrar o máximo raio de incerteza que ainda mantém o sistema estável. O sistema intervalar será estável se a solução da seguinte equação de Lyapunov intervalar for uma matriz intervalar simétrica definida positiva: $[\mathbf{A}_d]^T[\mathbf{P}][\mathbf{A}_d] - [\mathbf{P}] = -[\mathbf{C}]$, onde $[\mathbf{C}]$ é a matriz intervalar degenerada $[\mathbf{C}] = \mathbf{C} = \mathbf{I}$ e $[\mathbf{A}_d]$ a matriz de estados intervalar do sistema.

O produto de Kronecker foi utilizado para transformar a equação de Lyapunov em um sistema de equações algébricas. Os parâmetros não lineares foram substituídos por novos parâmetros intervalares.

Utilizou-se o Teorema 3.2.1, e os resultados foram comparados aos obtidos através da estabilidade quadrática. A Tabela 6 mostra os raios máximos de incerteza para alguns períodos de amostragem T .

Tabela 6 – Resultados Sistema Massa-mola

γ_{max} (%)		
T (s)	EQ	Teorema 3.2.1
0,1	sem solução	0,8
0,01	sem solução	0,92
0,001	sem solução	sem solução
0,0001	1,30	sem solução

A partir dos resultados obtidos, nota-se que o método baseado em análise intervalar fornece resultados melhores quando o período de amostragem é maior. Isto é

devido à forma da matriz $[\mathbf{G}]$ quando da sua transformação pelo produto de Kronecker, pois quanto menor o período de amostragem T , mais próxima da matriz intervalar nula (singular) fica $[\mathbf{G}] = (\mathbf{I} - [\mathbf{A}] \otimes [\mathbf{A}])$. Por outro lado, quando o período de amostragem é maior, obtém-se um resultado próximo ao obtido através da estabilidade quadrática com períodos de amostragem menores. Nota-se ainda que ambos resultados são mais conservadores do que os obtidos para o sistema massa-mola contínuo, o que é esperado, uma vez que a discretização do sistema é apenas uma aproximação do sistema contínuo, que envolve uma sobrestimação dos termos não lineares intervalares.

Além disso, o método utilizado para realizar a discretização, apesar de ser simples e amplamente utilizado, pode ser substituído por métodos mais eficazes, a fim de tentar diminuir a influência do período de amostragem na solução do sistema discretizado, bem como melhorar a aproximação do sistema contínuo.

4.6 Conclusão

O Capítulo 4 apresentou uma metodologia para realizar a análise de estabilidade de sistemas intervalares considerando a existência de parâmetros multi-incidentes no sistema. Abordagens baseadas em LMIs que também são utilizadas para realizar análise de estabilidade robusta foram apresentadas no sentido de obter comparações quantitativas e qualitativas sobre a eficácia do método apresentado. Através dos exemplos apresentados, foi possível observar que a metodologia, embora em princípio mais conservadora, apresenta algumas vantagens em relação a metodologias baseadas em LMIs.

5 Controle por Alocação de Polos

Este Capítulo 5 formula inicialmente o problema de projeto de controladores por meio da equação Diofantina. Em seguida, é apresentada uma alternativa para realizar a análise da não singularidade robusta da resultante de Sylvester intervalar associada a dois polinômios intervalares que considera a multi-incidência de parâmetros intervalares. É apresentado um método computacional para o projeto de controladores por alocação robusta de polos na presença de incertezas do tipo intervalar, baseado na solução da equação Diofantina intervalar. O projeto do controlador robusto é obtido na forma de um controlador intervalar, ou seja, um controlador com coeficientes intervalares que contém todas as soluções possíveis do problema de alocação dos polos. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados apresentados. Em seguida também é considerado o projeto de controladores robustos através de um problema de otimização, por meio do qual é possível obter um controlador robusto de custo mínimo. O projeto envolve a resolução da equação Diofantina intervalar parametrizada, que leva em conta a existência de multi-incidências de parâmetros. Os resultados obtidos são comparados aos de Cerone *et al.* (2015).

5.1 Equação Diofantina Intervalar

Considere o sistema de controle com realimentação unitária apresentado na Figura 3.

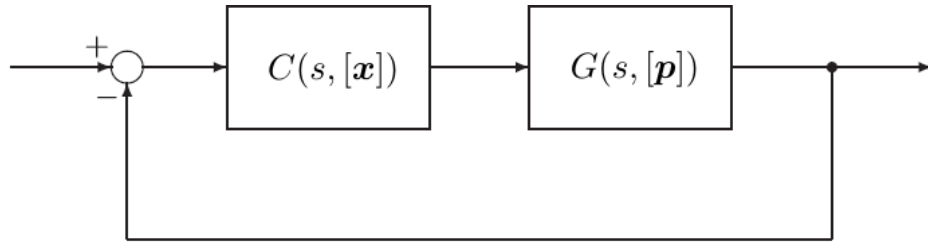


Figura 3 – Sistema de controle com realimentação unitária.

A planta a ser controlada é um sistema linear invariante no tempo intervalar de ordem n , descrito pela função de transferência racional

$$G(s, [p]) = \frac{N_p(s, [\mathbf{b}])}{D_p(s, [\mathbf{a}])}$$

com $N_p(s, [\mathbf{b}])$ e $D_p(s, [\mathbf{a}])$ polinômios na variável de Laplace s :

$$\begin{aligned} N_p(s, [\mathbf{b}]) &= [b_1]s^n + [b_2]s^{n-1} + \cdots + [b_{n+1}], \\ D_p(s, [\mathbf{a}]) &= [a_1]s^n + [a_2]s^{n-1} + \cdots + [a_{n+1}]. \end{aligned}$$

Consideramos que $0 \notin [a_1]$. Os coeficientes intervalares de $N_p(s, [\mathbf{b}])$ e $D_p(s, [\mathbf{a}])$ dão origem ao vetor intervalar de parâmetros $[\mathbf{p}] \in \mathbb{IR}^{2n+2}$ definido como

$$[\mathbf{p}] := [[p_1], [p_2], \dots, [p_{2n+2}]] = [[a_1], [a_2], \dots, [a_{n+1}], [b_1], [b_2], \dots, [b_{n+1}]].$$

O objetivo é encontrar o vetor intervalar $[\mathbf{x}]^T = [[x_1] \ [x_2] \ \dots \ [x_{2r+2}]]$ cujos componentes são os coeficientes do controlador dinâmico intervalar de ordem r

$$C(s, [\mathbf{x}]) = \frac{N_c(s, [\mathbf{x}])}{D_c(s, [\mathbf{x}])} = \frac{[x_1]s^r + [x_2]s^{r-1} + \dots + [x_r]}{[x_{r+1}]s^r + [x_{r+2}]s^{r-1} + \dots + [x_{2r+2}]}.$$

O controlador intervalar deve resolver a equação Diofantina intervalar

$$D_c(s, [\mathbf{x}])D_p(s, [\mathbf{a}]) + N_c(s, [\mathbf{x}])N_p(s, [\mathbf{b}]) = F(s, [\mathbf{f}]), \quad (5.1)$$

para algum polinômio característico de malha fechada intervalar

$$F(s, [\mathbf{f}]) := [f_1]s^{n+r} + [f_2]s^{n+r-1} + \dots + [f_{n+r+1}],$$

com $[\mathbf{f}] := [[f_1] \ [f_2] \ \dots \ [f_{n+r+1}]]^T$, $[\mathbf{f}] \in \mathbb{IR}^{n+r+1}$.

O *conjunto espectral* de (qualquer polinômio intervalar) $F(s, [\mathbf{f}])$ é o conjunto de todas as raízes de $F(s, [\mathbf{f}]) = 0$ quando \mathbf{f} varia em $[\mathbf{f}]$. O conjunto espectral de $F(s, [\mathbf{f}])$ descreve a região do semi-plano esquerdo do plano complexo onde os polos de malha fechada do sistema devem ser alocados (SOH *et al.*, 1987; LORDELO; FERREIRA, 2006). Pode ser calculado e representado graficamente no plano complexo utilizando o *Teorema das Arestas* (BHATTACHARYYA *et al.*, 1995).

Na análise seguinte, consideramos $r = n - 1$, o que nos permite escrever (5.1) como um sistema de equações lineares quadrado e garante a alocação de polos arbitrária para sistemas precisamente conhecidos (CHEN, 1999). Na forma matricial,

$$[\mathbf{S}][\mathbf{x}] = [\mathbf{f}], \quad (5.2)$$

com $[\mathbf{S}] := S([\mathbf{p}])$, $[\mathbf{S}] \in \mathbb{IR}^{2n \times 2n}$, a matriz de Sylvester (resultante) associada ao sistema $G(s, [\mathbf{p}])$, dada por

$$S([\mathbf{p}]) = \begin{bmatrix} [b_1] & & & [a_1] & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ [b_2] & & [b_1] & [a_2] & & [a_1] \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ [b_{n+1}] & & [b_2] & [a_{n+1}] & & [a_2] \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & [b_{n+1}] & & & [a_{n+1}] \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

É evidente que a matriz de Sylvester (5.3) apresenta múltiplas incidências dos coeficientes da planta, o que impõe um alto nível de conservadorismo quando métodos

clássicos de análise intervalar são utilizados para resolver (5.2) (LORDELO; FERREIRA, 2006).

Para sistemas precisamente conhecidos, a equação Diofantina matricial $\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{f}$ tem uma única solução \mathbf{x} para qualquer \mathbf{f} dado, se e somente se \mathbf{S} é não singular. Por sua vez, \mathbf{S} é não singular se e somente se os polinômios (numerador e denominador) que descrevem a planta são coprimos (CHEN, 1999). A seguinte Proposição estabelece uma condição suficiente para a coprimo robustez de polinômios intervalares.

Proposição 5.1.1. *Dois polinômios intervalares são coprimos se a matriz de Sylvester intervalar associada $[\mathbf{S}]$ é não singular.*

A prova da Proposição 5.1.1 é simples. Se $[\mathbf{S}]$ é não singular, então cada matriz de Sylvester $\mathbf{S} \in [\mathbf{S}]$ é não singular, implicando que os polinômios intervalares são coprimos. A não singularidade de $[\mathbf{S}]$ é uma condição suficiente para a coprimo robustez pois $[\mathbf{S}]$ contém matrizes que não são matrizes de Sylvester. Nesta Tese, a não singularidade de $[\mathbf{S}]$ é testada utilizando o Corolário 2.5.1.

5.2 Regularidade da Resultante de Sylvester com Tratamento de Multi-incidência de Parâmetros

Uma maneira de testar a regularidade (não singularidade) de matrizes intervalares levando em conta a multi-incidência de parâmetros é considerar o fato de que uma matriz é regular se e somente se seu determinante for diferente de zero. O seguinte procedimento numérico foi implementado para fins de comparação de resultados.

Considere a matriz de Sylvester dada por (5.3). Esta matriz pode ser descrita em função de seus parâmetros intervalares, dados por $[\mathbf{p}] = [[p_1], [p_2], \dots, [p_k]]$, com k o número de parâmetros intervalares da matriz. Cada parâmetro $[p_i]$, $i = 1, \dots, k$ pode ser discretizado em q valores, tais que $[p_i] = [p_i^-, p_i^+] = [p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^q]$. Pode-se calcular então o determinante de cada matriz de Sylvester associada a cada conjunto de parâmetros $[p_i^q]$ e verificar se cada um deles é diferente de zero, estabelecendo-se uma tolerância. Um algoritmo foi elaborado para testar o maior número possível de matrizes de Sylvester $\mathbf{S} \in [\mathbf{S}]$ considerando que há parâmetros intervalares multi-incidentes. O algoritmo proposto representa uma condição necessária para a verificação da regularidade da matriz de Sylvester. Nele, considerou-se que a matriz é singular se o seu determinante for menor do que $\sqrt{\epsilon ps}$, com $\epsilon ps = 2,2204.10^{-16}$.

Algoritmo 5.2.1. *Dados: $[\mathbf{S}]$, $[p_i]$, $i = 1, \dots, k$.*

Passo 0: *Obtém-se os valores de p_i^q , para q suficientemente grande;*

Passo 1: *Calcula-se o determinante de cada matriz de Sylvester e verifica-se a condição $\det(S_i^q) > tol$, com $tol = \sqrt{\epsilon ps}$;*

Passo 2: Se alguma matriz possuir determinante inferior à tolerância, o algoritmo para retornando que a matriz não é regular. Caso contrário, assume-se que a resultante de Sylvester é regular.

O exemplo a seguir mostra a efetividade deste algoritmo para realizar a análise da regularidade da resultante de Sylvester.

Exemplo 5.2.1. (CERONE et al., 2015)

Considere a resultante de Sylvester associada aos polinômios intervalares $N_p(s) = [b_2]s^2 + [b_1]s + [b_0]$ e $D_p(s) = s^3 + [a_2]s^2 + [a_1]s + [a_0]$, com $[b_2] = [2 - \Delta, 2 + \Delta]$, $[b_1] = [6, 5 - \Delta, 6, 5 + \Delta]$, $[b_0] = [-4, 5 - \Delta, -4, 5 + \Delta]$, $[a_2] = [6 - \Delta, 6 + \Delta]$, $[a_1] = [4 - \Delta, 4 + \Delta]$ e $[a_0] = [-7, 5 - \Delta, -7, 5 + \Delta]$. $\Delta \geq 0$ representa o raio de incerteza dos coeficientes intervalares. Objetiva-se encontrar o maior raio de incerteza tal que os polinômios sejam robustamente coprimos. Em Cerone et al. (2015), o máximo valor para o raio de incertezas encontrado foi de $\Delta = 0,2302$. Utilizando-se o Algoritmo 5.2.1, obteve-se $\Delta = 0,4999$, considerando $q = 15$.

Outra maneira de garantir a coprimo robustez de polinômios intervalares é realizando a análise de não singularidade robusta da resultante de Sylvester do sistema, como discutido na Seção 2.5 do Capítulo 2 desta Tese.

5.3 Solução da Equação Diofantina Intervalar com Tratamento de Multi-incidências

A equação Diofantina intervalar $[S][x] = [f]$ pode ser resolvida considerando-se as múltiplas ocorrências do parâmetro $[p]$. Por meio do Teorema 3.2.1 encontra-se um conjunto de controladores $[x] \in \Sigma$, e se $\mathcal{S}([F(s)])$ (conjunto espectral de $[F(s)]$) está contido numa região onde as especificações de desempenho em malha fechada são satisfeitas, então qualquer controlador em $[x]$ pode ser selecionado.

Exemplo 5.3.1. (JAULIN et al., 2001) Considere a planta de terceira ordem com coeficientes incertos

$$[P(s)] = \frac{p_1 p_3^2}{(p_2 s + 1)(s^2 + p_3 s + p_3^2)}, \quad p_i = [0,9458, 1,0542] \quad i = 1, 2, 3.$$

Por meio de um controlador de segunda ordem, deseja-se alocar o polinômio característico de malha fechada

$$b_c(s) = s^5 + 10s^4 + 42s^3 + 96s^2 + 112s + 64,$$

que corresponde aos pólos em -4 , $-2 \pm j2$ e $-1 \pm j$. A matriz de Sylvester intervalar correspondente é não singular para qualquer p_1 , p_2 e p_3 em $[0,9458, 1,0542]$, condição esta verificada através do Corolário 2.5.1. Utilizando a análise intervalar clássica, ou

seja, sem considerar a ocorrência de parâmetros multi-incidentes na matriz de Sylvester, encontramos

$$[C_{cla}(s)] = \frac{[10,6998, 50,5898]s^2 + [27,4035, 83,2633]s + [23,4723, 55,7416]}{s^2 + [7,2914, 8,7027]s + [19,9609, 27,9862]}.$$

Considerando a ocorrência de multi-incidências na matriz de Sylvester, ou seja, resolvendo-se a equação Diofantina por meio do Teorema 3.2.1, obtém-se o controlador

$$[C_{out}(s)] = \frac{[18,8873, 42,4023]s^2 + [33,6808, 76,9860]s + [26,7469, 52,4670]}{s^2 + [7,5256, 8,4686]s + [22,3443, 25,6028]}.$$

Observa-se que a aproximação obtida quando se considera as multi-incidências é consideravelmente menos conservadora do que a obtida através da análise intervalar clássica. A Figura 4 ilustra os espectros de (5.1) quando os controladores intervalares $[C_{cla}(s)]$ (em preto) e $[C_{out}(s)]$ (em cinza) são utilizados.

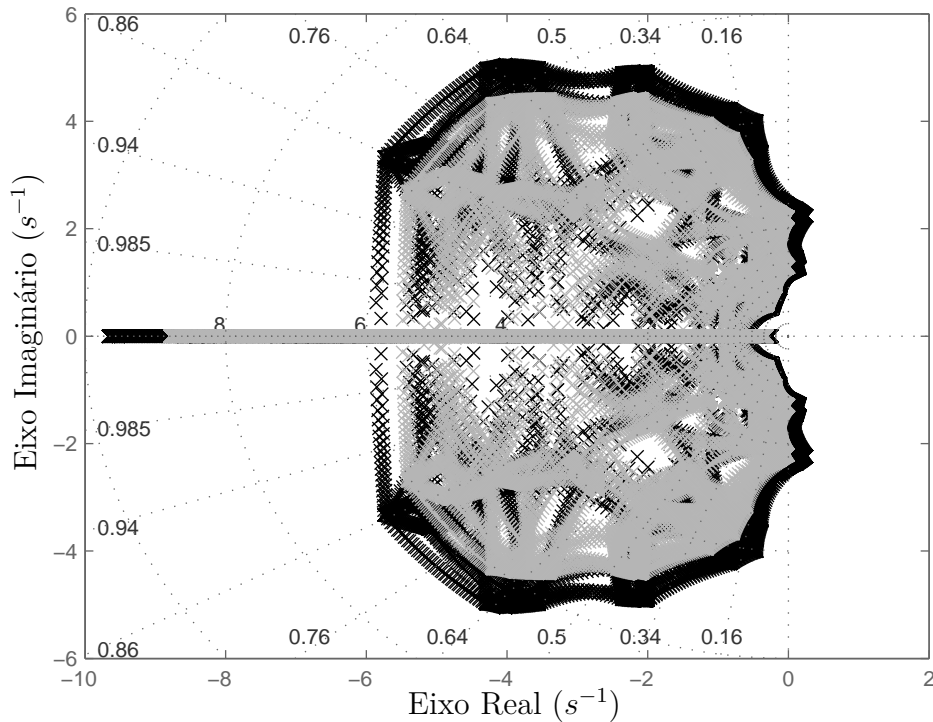


Figura 4 – Espectros de malha fechada gerados pelos controladores $[C_{cla}(s)]$ (em preto) e $[C_{out}(s)]$ (em cinza). Todos os polos de malha fechada de $[C_{out}(s)]$ estão localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo.

Observa-se que somente quando utiliza-se o controlador $[C_{out}(s)]$ pode-se garantir que o sistema em malha fechada ainda permanecerá estável. O espectro de $[C_{cla}(s)]$

contém polos no semi-plano direito do plano complexo. Isto ocorre devido ao fato de que a metodologia utilizada para obter a solução não calcula a casca intervalar, mas sim uma aproximação desta. Sendo assim, quanto maior é o conservadorismo da solução, mais longe se está da casca intervalar, o que pode levar os polos a serem localizados no semi-plano direito do plano complexo, inviabilizando o controlador obtido. Sendo assim, é necessário realizar uma análise a posteriori do controlador obtido a fim de verificar se este é viável ou não.

Em alguns casos não é possível obter solução da equação Diofantina intervalar sem considerar as multi-incidências.

5.4 Projeto de Controladores Robustos

Um projeto de controlador robusto que considera as multi-incidências de parâmetros intervalares é apresentado nesta seção. Objetiva-se solucionar o problema de alocação robusta de polinômios característicos por meio da solução da equação Diofantina intervalar. Considere a equação Diofantina na forma matricial parametrizada $[\mathbf{S}(\mathbf{p})]\mathbf{x} = [\mathbf{f}(\mathbf{p})]$. O problema de alocação robusta de polos pode ser reformulado em termos do seguinte problema de viabilidade: encontre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2r+2}$ tal que, para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e $i = 1, \dots, n+r$,

$$\begin{cases} [\mathbf{S}_i]\mathbf{x} - \mathbf{f}_i^- \geq 0 \\ [\mathbf{S}_i]\mathbf{x} + \mathbf{f}_i^+ \leq 0. \end{cases},$$

onde $[\mathbf{S}_i]$ denota a i -ésima linha de $[\mathbf{S}]$. De maneira equivalente, pode-se formular o problema como em (3.7), tornando explícitos os parâmetros $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$:

$$\begin{cases} g_i^-(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = -\mathbf{S}_i^0 \mathbf{x} - \sum_j p_j \mathbf{S}_i^j \mathbf{x} + \mathbf{f}_i^- \leq 0 \\ g_i^+(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{S}_i^0 \mathbf{x} + \sum_j p_j \mathbf{S}_i^j \mathbf{x} - \mathbf{f}_i^+ \leq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

onde \mathbf{S}_i^0 representa uma matriz numérica independente de \mathbf{p} e \mathbf{S}_i^j são matrizes numéricas dependentes de p_j . Note que (5.4) é um problema de viabilidade robusta, pois os parâmetros do controlador \mathbf{x} estão multiplicados pelos parâmetros da matriz de Sylvester. A robustez de um dado controlador \mathbf{x} pode ser testada resolvendo-se o problema de otimização

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \sigma \\ \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \sigma & \\ \text{sujeito a} & \sigma \geq g_i^-(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ & \sigma \geq g_i^+(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad i = 0, \dots, n+r. \end{array} \quad (5.5)$$

Se uma solução ótima $\mathbf{p}(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x})$ do problema de otimização (5.5) for tal que $\sigma(\mathbf{x}) \leq 0$, então o controlador será robusto. O controlador \mathbf{x} pode ser determinado como

aquele que minimiza a sua norma Euclidiana, com vistas a reduzir a energia necessária para realizar o controle do sistema. Neste caso, o problema (5.5) se transforma em um problema de Otimização Bi-nível.

Otimização bi-nível é utilizada para resolver problemas com dois níveis de decisão completamente hierarquizados. Nestes problemas, o conjunto viável é determinado (em parte) usando o mapeamento do conjunto-solução de um segundo problema de otimização paramétrica. (BARD, 1998), (DEMPE; FRANKE, 2016), (COLSON *et al.*, 2007), (DEMPE *et al.*, 2015). A formulação padrão de um problema de otimização bi-nível é dada por

$$\left| \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f^u(x, \hat{y}) \\ & x \in \mathcal{X}, \hat{y} \\ \text{sujeito a} & g^u(x, \hat{y}) \leq 0 \\ & \hat{y} = \arg \min_{y \in \mathcal{Y}} f^l(x, y) \\ & \text{sujeito a } g^l(x, y) \leq 0 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. As variáveis do problema (5.6) são divididas em duas classes denominadas variáveis de nível superior $x \in \mathbb{R}^n$ e de nível inferior $y \in \mathbb{R}^m$. Similarmente, $f^u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções-objetivos de nível superior e inferior, respectivamente, enquanto as funções $g^u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{q_1}$ e $g^l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{q_2}$ são as restrições de nível superior e inferior, respectivamente. As restrições de nível superior envolvem variáveis de ambos os níveis (em contraste com as restrições especificadas pelo conjunto \mathcal{X}) e desempenham um papel muito específico. Estas restrições devem ser consideradas indiretamente. O problema (5.5), pode-se ser formulado como um problema de otimização bi-nível:

$$Q([\mathbf{p}]) = \left| \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \\ & \text{sujeito a} \\ & v(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}, \sigma} \sigma \\ & \sigma \geq g_i^-(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ & \sigma \geq g_i^+(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ & \sigma \leq 0 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

O problema de nível superior corresponde à minimização da energia do controlador; o problema de nível inferior é resolvido em $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e σ (se existir) para encontrar um controlador \mathbf{x} viável robusto. Embora em princípio, \mathcal{P} possa ser qualquer conjunto poliedral, nesta Tese consideramos $\mathcal{P} = [\mathbf{p}]$ um vetor intervalar de parâmetros. São considerados todos os vértices do vetor $[\mathbf{p}]$, ou seja, todas as combinações entre os valores

mínimos e máximos de cada parâmetro da planta, possibilitando encontrar um controlador robusto ótimo.

Em Cerone *et al.* (2015), o projeto de controladores robustos é realizado através da solução da equação Diofantina intervalar, considerando parâmetros incertos pertencentes a regiões semi-algébricas. O projeto se baseia na solução de problemas de otimização não-convexa através de programação semi-definida, obtidos realizando-se relaxações LMIs. O problema (5.7) pode ser utilizado para resolver problemas que envolvem incertezas paramétricas pertencentes a conjuntos convexos e não somente para incertezas intervalares. O exemplo a seguir mostra o bom desempenho do método descrito comparando os resultados com os obtidos por Cerone *et al.* (2015).

Exemplo 5.4.1. *Considere a planta de segunda ordem com função de transferência*

$$\mathbf{G}(s, [\mathbf{p}]) = \frac{\mathbf{N}_p(s, [\mathbf{p}])}{\mathbf{D}_p(s, [\mathbf{p}])} = \frac{[a_1]s + [a_2]}{s^2 + [b_1][b_2]s + [b_2]},$$

sendo os parâmetros incertos $[a_1] = [1, 2]$, $[a_2] = [7.5, 8.398]$, $[b_1] = [-8.55, -7.95]$, $[b_2] = [0.35, 0.55]$, resultando no vetor de parâmetros $[\mathbf{p}] = [[a_1], [a_2], [b_1][b_2], [b_2]] = [[p_1], [p_2], [p_3], [p_4]]$. É importante notar que nenhum sistema pertencente à família de plantas incertas é estável, pois o coeficiente $[p_3][p_4]$ é negativo para todos os valores dos parâmetros $[p_3]$ e $[p_4]$.

Inicialmente, é comprovada a coprímulo-robustez dos polinômios incertos $\mathbf{N}_p(s, [\mathbf{p}])$ e $\mathbf{D}_p(s, [\mathbf{p}])$ através do Corolário 2.5.1. Depois, um controlador é projetado para obter o polinômio característico de malha fechada

$$\mathbf{F}(s) = s^3 + [f_2]s^2 + [f_1]s + [f_0].$$

com coeficientes incertos pertencentes a intervalos fechados $[f_2] = [4, 16]$, $[f_1] = [25, 41]$ e $[f_0] = [33, 41]$. Expressando-se o problema de otimização bi-nível (5.7) nas variáveis σ e

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$, em termos dos dezesseis vértices de $[\mathbf{p}]$, obtém-se

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \\
 \text{sujeito a} & \\
 & v(x) = \max \sigma \\
 & \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \sigma \\
 & -p_1x_1 - p_2x_1 - p_3x_4 - p_4x_3 - \sigma \leq -25 \\
 & p_1x_2 + p_2x_1 + p_3x_4 + p_4x_3 - \sigma \leq 41 \\
 & -x_4 - p_1x_1 - p_3x_3 - \sigma \leq -4 \\
 & x_4 + p_1x_1 + p_3x_3 - \sigma \leq 16 \\
 & -p_2x_2 - p_4x_4 - \sigma \leq -33 \\
 & p_2x_2 + p_4x_4 - \sigma \leq 41 \\
 & -x_3 - \sigma \leq -1 \\
 & x_3 - \sigma \leq 1 \\
 & \sigma \leq 0
 \end{array}$$

A resolução deste problema fornece o controlador robusto $\mathbf{x}_{rob} = [5,0272, 4,2285, 1, 3,6753]$.

O conjunto espectral de malha fechada relativo a \mathbf{x}_{rob} é ilustrado na Figura 5 (em preto).

O controlador $\mathbf{C}_{rob}(s)$ que garante que as raízes do polinômio em malha-fechada pertencem ao conjunto espectral da Figura 5 é

$$\mathbf{C}_{rob}(s) = \frac{5,0272s + 4,2285}{s + 3,6753}.$$

Em Cerone et al. (2015), o controlador obtido foi $\mathbf{x}_{sdp} = [5,150, 4,374, 1, 4,065]$, resultando no conjunto espectral de malha fechada também ilustrado na Figura 5 (em cinza).

O controlador é dado por

$$\mathbf{C}_{sdp}(s) = \frac{5,150s + 4,374}{s + 4,065}.$$

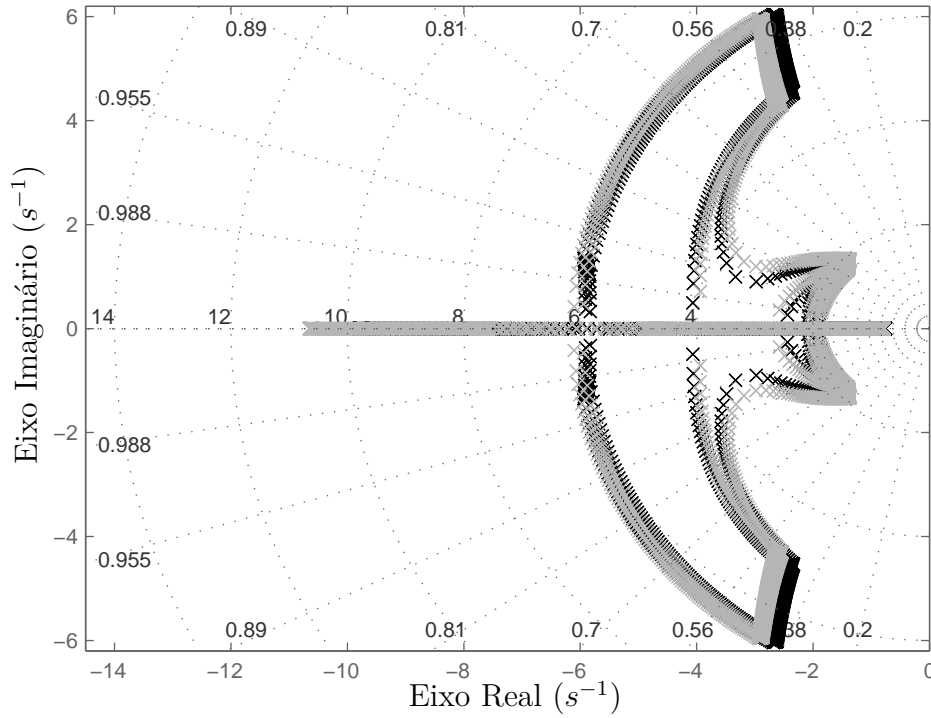


Figura 5 – Espectros de malha fechada dos controladores $[C_{rob}(s)]$ (em preto) e $[C_{sdp}(s)]$ (em cinza).

É possível observar que os controladores obtidos são similares, pois seus conjuntos espectrais são semelhantes. Na metodologia proposta por Cerone et al. (2015), as incertezas são semi-algébricas, podendo constituir conjuntos não convexos. O método proposto é mais simples do que o utilizado por Cerone et al. (2015), para esta classe de incertezas. As Figuras 6 e 7 mostram os conjuntos das incertezas consideradas por Cerone et al. (2015) e as Figuras 8 e 9 mostram as cascas intervalares obtidas e consideradas no Exemplo 5.4.1. Nota-se que mesmo realizando-se a aproximação, foi possível obter um controlador similar para o problema proposto.

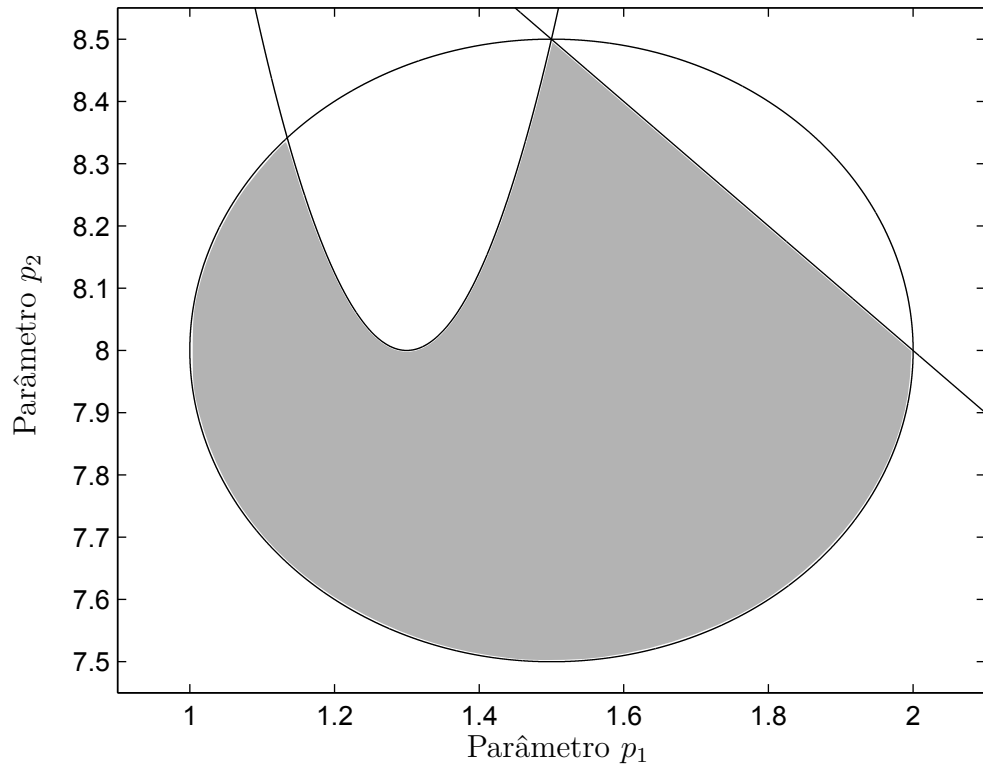


Figura 6 – Conjunto das incertezas p_1 e p_2 , consideradas em Cerone *et al.* (2015).

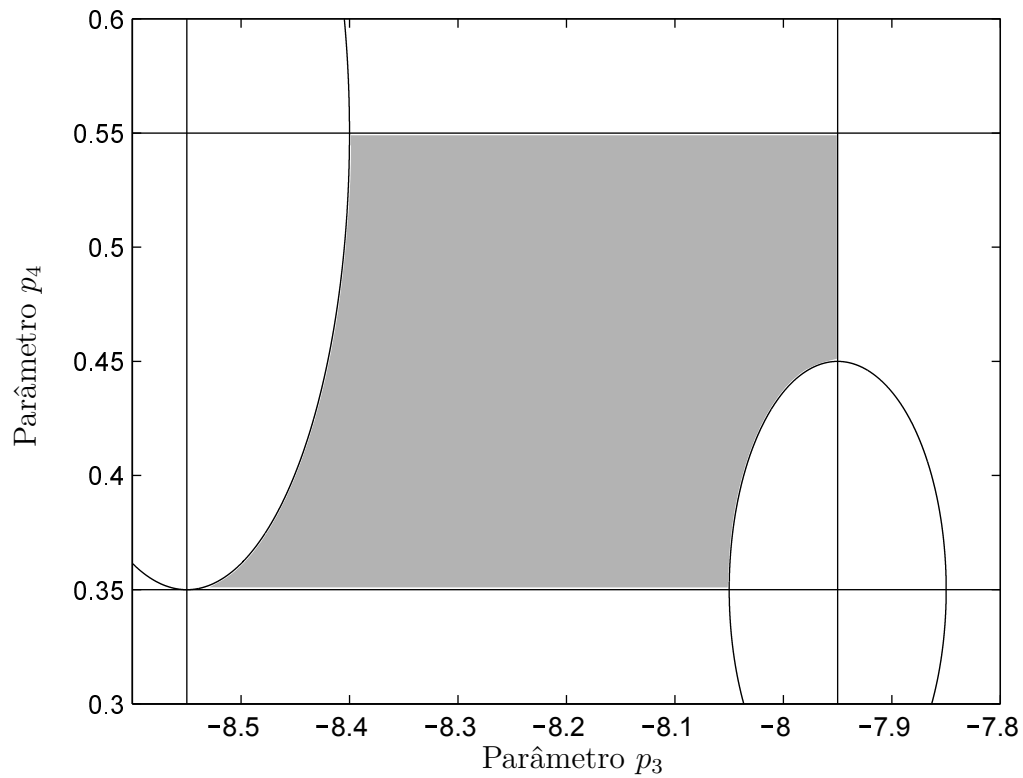
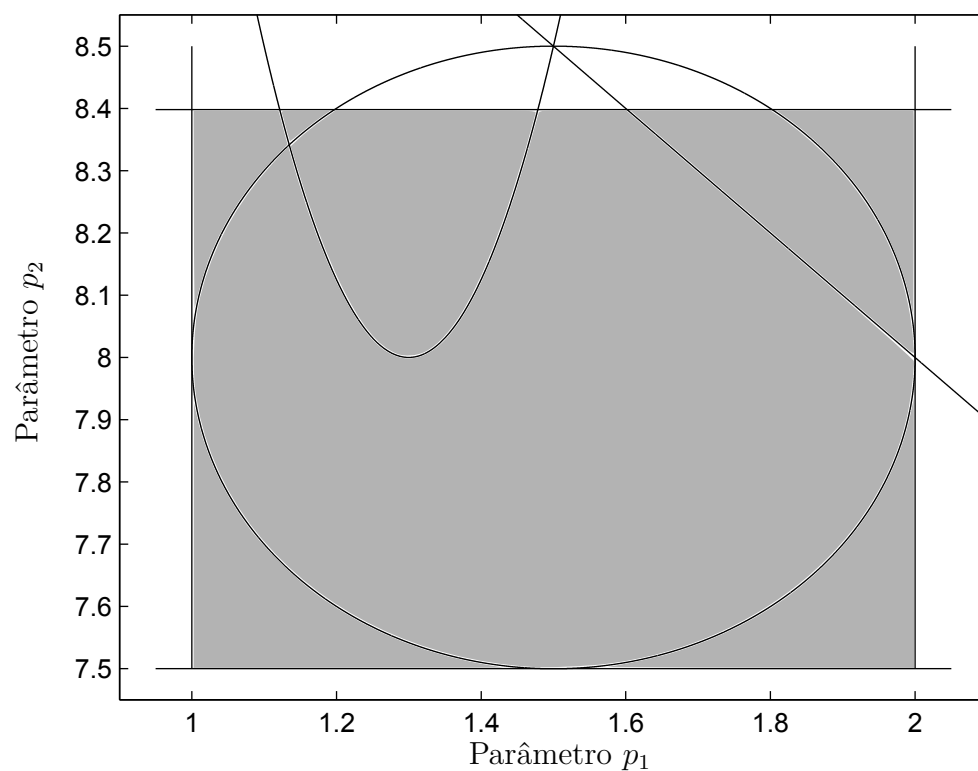
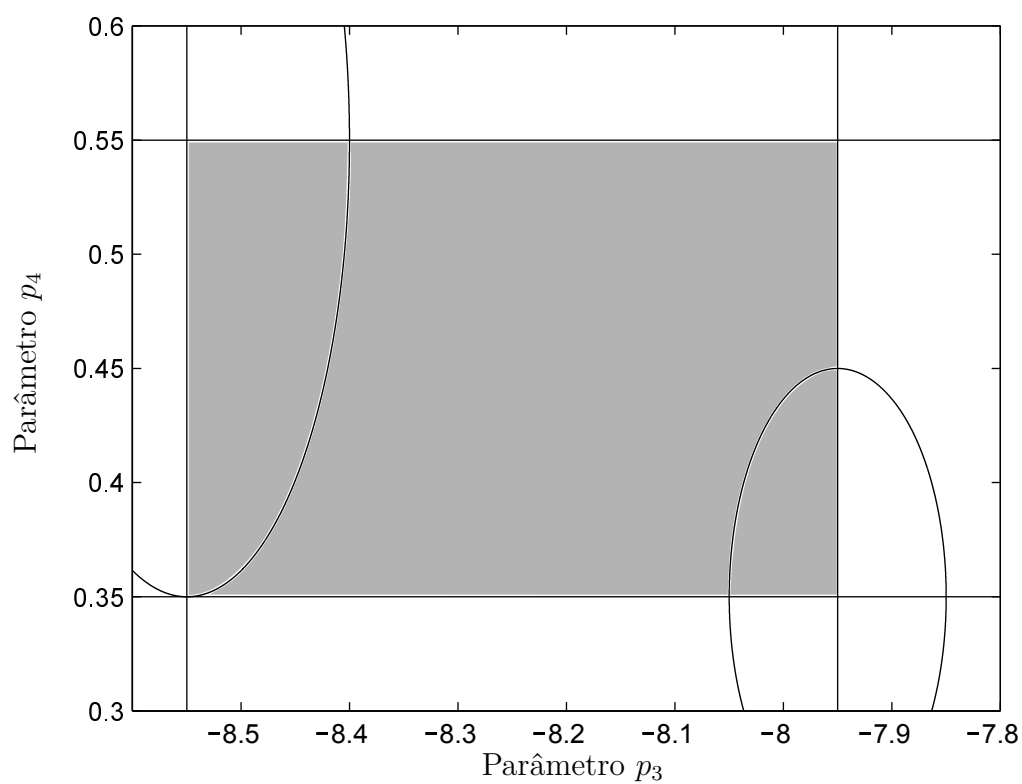


Figura 7 – Conjunto das incertezas p_3 e p_4 , consideradas em Cerone *et al.* (2015).

Figura 8 – Conjunto das incertezas p_1 e p_2 intervalares.Figura 9 – Conjunto das incertezas p_3 e p_4 intervalares.

5.4.1 Programação Alvo na Alocação Robusta de Polos

Uma outra abordagem computacional, baseada em otimização, para projeto de controladores de ordem fixa foi proposta em Lordelo e Ferreira (2006). O método envolve técnicas clássicas de projeto por alocação de pólos para plantas lineares e invariantes no tempo através de programação alvo. O uso de Programação Alvo com coeficientes intervalares (INUIGUCHI; KUME, 1991) permite uma solução consideravelmente mais simples para o problema de alocação robusta do que as apresentadas em (SOH *et al.*, 1987) e (KEEL; BHATTACHARYYA, 1999). O objetivo do projeto é a minimização do desvio total do desempenho desejado para o sistema em malha fechada, especificado pelo espectro do polinômio característico de malha fechada. Utiliza-se o conceito de centralização aplicado a um algoritmo de otimização global para obter um controlador robusto não frágil.

A idéia é determinar um controlador central \mathbf{x} e o máximo raio θ , tais que

$$\mathbf{x} + \theta \mathbf{C} \in \Sigma_0,$$

sendo \mathbf{C} um determinado conjunto convexo que descreve como os coeficientes do controlador podem variar e $\mathbf{x} + \theta \mathbf{C} := \{\mathbf{x} + \theta \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \Sigma_0\}$ e

$$\Sigma_0 := \{\mathbf{x} : \mathbf{S}\mathbf{x} \in [\mathbf{f}] \text{ para toda } \mathbf{S} \in [\mathbf{S}]\}$$

O raio θ representa uma medida da *não fragilidade* do controlador robusto \mathbf{x} quando os seus coeficientes variam de acordo com \mathbf{C} . Assumindo que \mathbf{C} é um hiper-retângulo, isto é, um vetor intervalar em \mathbb{IR}^q , o problema de projeto do controlador assume a forma (LORDELO; FERREIRA, 2006)

$$\begin{aligned} & \underset{\theta, \mathbf{x}, \mathbf{y}}{\text{maximizar}} && \theta \\ & \text{sujeito a} && \begin{aligned} & \mathbf{S}_c(\mathbf{I}_q + \theta \mathbf{T})\mathbf{x} - \Delta \mathbf{y} \geq \mathbf{f}^-, \\ & \mathbf{S}_c(\mathbf{I}_q - \theta \mathbf{T})\mathbf{x} - \Delta \mathbf{y} \geq \mathbf{f}^-, \\ & \mathbf{S}_c(\mathbf{I}_q + \theta \mathbf{T})\mathbf{x} + \Delta \mathbf{y} \leq \mathbf{f}^+, \\ & \mathbf{S}_c(\mathbf{I}_q - \theta \mathbf{T})\mathbf{x} + \Delta \mathbf{y} \leq \mathbf{f}^+, \\ & -\mathbf{y} \leq (\mathbf{I}_q + \theta \mathbf{T})\mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \\ & -\mathbf{y} \leq (\mathbf{I}_q - \theta \mathbf{T})\mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \\ & \theta \geq 0, \end{aligned} \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde, $\mathbf{T} := \text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_q)$, e $t_i = 1$, se a variação no i -ésimo componente de \mathbf{x} é considerada, e $t_i = 0$, caso contrário.

A solução do problema (5.8) determina o centro \mathbf{x}^* e o raio θ^* do maior hiper-retângulo contido em Σ_0 , o que maximiza as possíveis variações de \mathbf{x}^* .

Os resultados obtidos com a metodologia baseada no problema bi-nível mostram-se muito próximos dos que foram obtidos em Lordelo e Ferreira (2006), o que parece indicar que a abordagem proposta por Lordelo e Ferreira (2006) também considera as multi-incidências nos parâmetros intervalares.

Exemplo 5.4.2. Considere o problema descrito no Exemplo 5.4.1. Utilizando-se a metodologia baseada na solução do problema (5.8), obteve-se o controlador

$$C_{nf}(s) = \frac{5,0272s + 4,2285}{s + 3,6753}$$

Observa-se que através de (5.8) obteve-se exatamente o mesmo controlador obtido pela metodologia bi-nível.

Exemplo 5.4.3. Considere a função de transferência da planta de segunda ordem com coeficientes intervalares apresentada em Lordelo (2004):

$$[P(s)] = \frac{s + [a_3]}{s^2 - 2.2s + [a_6]},$$

com $[a_3] = [0,5, 1,5]$ e $[a_6] = [-2,6, -2,2]$. Deseja-se projetar um controlador de primeira ordem para alocar de forma robusta os pólos de malha fechada do sistema no espaço de raízes determinado pelo intervalo $[\mathbf{f}] = [\mathbf{f}^-, \mathbf{f}^+]$, com

$$\mathbf{f}^- = \begin{bmatrix} 1,000 & 9,600 & 12,81 & 5,120 \end{bmatrix}^T \quad e \quad \mathbf{f}^+ = \begin{bmatrix} 1,000 & 14,40 & 30,17 & 24,68 \end{bmatrix}^T.$$

Foram utilizadas duas metodologias para calcular controladores robustos. A primeira, baseada na solução do problema (5.5), considerando coeficientes não negativos para o controlador, fornece

$$C_{rob}(s) = \frac{11,17s + 14,71}{s + 0,63}$$

Considerando-se o problema (5.8), acrescentando-se a restrição $[\mathbf{I}_2 \dot{\cdot} - \mathbf{I}_2]\mathbf{x}$, impondo um controlador com coeficientes não negativos, obtém-se

$$C_{nf}(s) = \frac{11,61s + 14,24}{s + 0,43}$$

A Figura 10 ilustra o conjunto espectral de malha fechada para os controladores $C_{rob}(s)$ (em preto) e $C_{nf}(s)$ (em cinza). Nota-se que os conjuntos espectrais para ambos controladores são semelhantes e estão ambos contidos na região desejada, como pode ser observado na Figura 11.

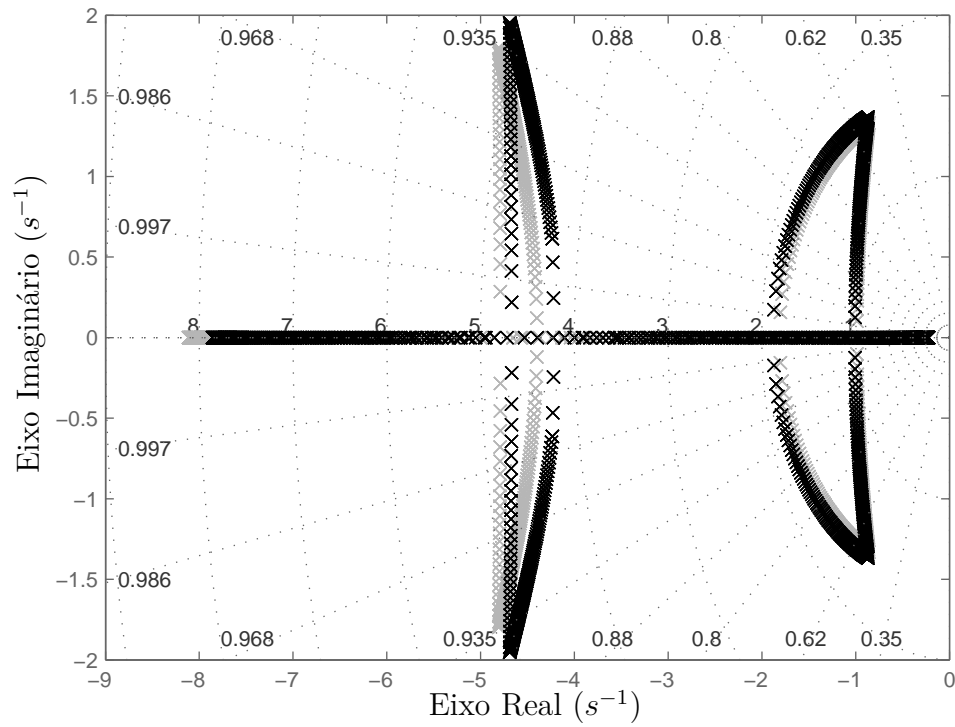


Figura 10 – Espectros de malha fechada dos controladores $[C_{rob}(s)]$ (em preto) e $[C_{nf}(s)]$ (em cinza).

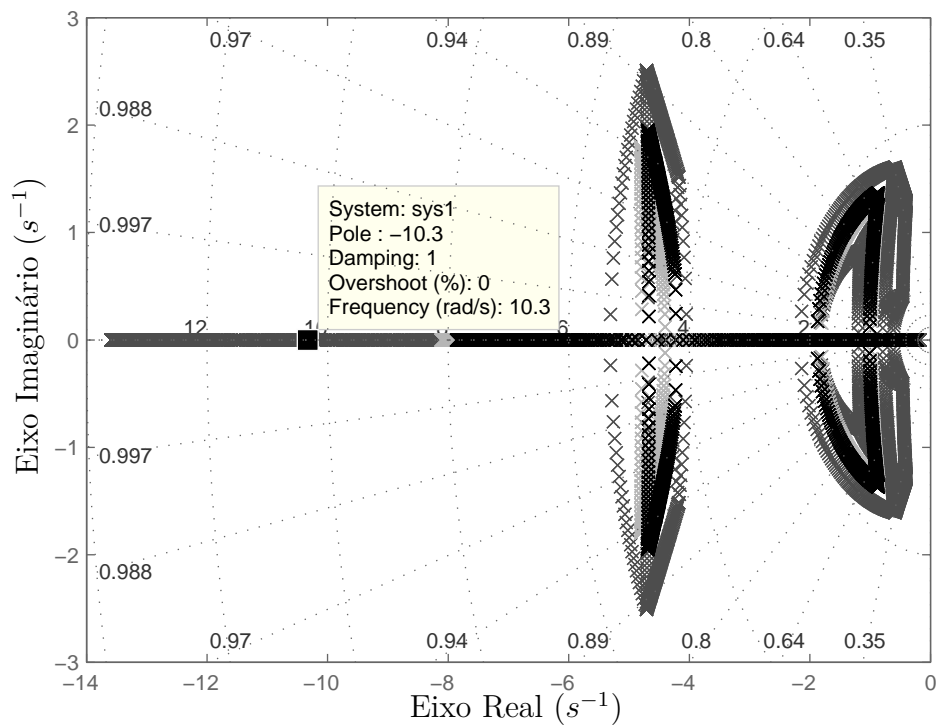


Figura 11 – Espectros de malha fechada dos controladores $[C_{rob}(s)]$ (em preto) e $[C_{nf}(s)]$ (em cinza claro) e conjunto espectral desejado (cinza escuro).

5.5 Conclusão

O Capítulo 5 apresentou metodologias para realizar o controle de sistemas intervalares considerando as multi-incidências de parâmetros. Inicialmente foi proposta uma alternativa para avaliar a coprimo-robustez de polinômios intervalares e um controlador intervalar foi obtido através da solução da equação Diofantina intervalar. Através de exemplos, mostrou-se que a metodologia proposta possibilita um maior raio de incertezas nos parâmetros da planta, bem como garante controladores com coeficientes de menor raio.

Foi proposta em seguida uma metodologia para a obtenção de um controlador robusto através da solução de um problema de otimização bi-nível. Os exemplos procuram ilustrar a eficácia do método, o qual permite encontrar um controlador robusto através da solução de um problema de otimização relativamente simples. Vale ressaltar que a metodologia proposta é válida para outros tipos de incertezas descritas pelo conjunto \mathcal{P} em especial quando \mathcal{P} é um conjunto poliedral, o que mantém linear o problema de otimização a ser resolvido.

6 Conclusão Geral

Esta Tese abordou o uso de análise intervalar com tratamento de multi-incidências na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos lineares e projeto de controladores robustos baseados em alocação de pólos para sistemas de controle com plantas intervalares.

Foram discutidos resultados importantes de análise intervalar clássica relacionados à solução de equações lineares intervalares, à regularidade e positividade de matrizes intervalares. A solução de sistemas lineares intervalares foi abordada levando-se em consideração a existência de multi-incidências de parâmetros nas matrizes do sistema. Foram apresentadas diferentes realizações da parametrização do sistema a fim de melhorar o desempenho computacional. Os resultados obtidos mostraram que a solução de sistemas lineares intervalares com o tratamento de multi-incidências leva a aproximações melhores do conjunto-solução do que aquela obtida através de análise intervalar clássica.

Foram investigados conceitos relacionados a estabilidade robusta de sistemas dinâmicos lineares intervalares. A equação de Lyapunov intervalar foi introduzida e transformada em um sistema de equações lineares intervalares através de duas abordagens, uma baseada no produto de Kronecker, outra proposta por Bingulac (1970). Desta forma, foi possível realizar a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos lineares intervalares com o tratamento das multi-incidências de parâmetros. Os resultados obtidos se mostraram superiores quando comparados aos baseados em análise intervalar sem o tratamento das multi-incidências de parâmetros e se mostraram competitivos em relação aos métodos baseados em LMIs, no que diz respeito aos tempos de processamento.

Métodos para projeto de controladores robustos baseados na solução da equação Diofantina intervalar foram propostos nesta Tese. O projeto de controladores por alocação robusta de pólos na presença de incertezas intervalares baseado na solução da equação Diofantina intervalar considerou as multi-incidências nos parâmetros da planta. Obteve-se controladores intervalares contendo todas as soluções possíveis do problema de alocação de pólos. Os resultados mostraram aproximações dos conjuntos-soluções menores do que aquela obtida pela análise intervalar clássica.

Um método de projeto de controladores robustos baseado na solução de um problema de otimização também foi proposto. O problema de otimização considera a solução da equação Diofantina parametrizada e é formulado como um problema de otimização bi-nível. Os resultados obtidos mostraram a eficácia do método, comparativamente muito mais simples e na prática equivalente a um método alternativo recentemente proposto na literatura.

O trabalho realizado nesta Tese pode viabilizar a aplicação das metodologias propostas a sistemas reais, obtendo-se controladores robustos adequados às especificações

de desempenho desejadas, o que dificilmente poderia ser feito a partir da análise intervalar clássica.

O escopo da Análise Intervalar é muito amplo e o conjunto de resultados disponíveis ainda é pouco explorado pela comunidade da área de Controle. Em particular, a aplicação de resultados relacionados a sistemas de equações não lineares intervalares e a utilização de outras formas de parametrização são temas a serem explorados em nossos trabalhos futuros.

Ainda para trabalhos futuros, pode ser estudada a redução do conservadorismo da solução obtida através do Teorema 3.2.1 realizando-se uma análise mais aprofundada da escolha de \mathbf{Y} e como ela interfere na inclusão $\mathbf{Y} \subsetneq \mathbf{V}$. Desta forma, pode-se melhorar a verificação da não singularidade robusta da matriz \mathbf{A} do sistema e conseguir uma solução menos conservadora.

Propõe-se ainda estudar um procedimento para gerar regiões de alocação para problemas de controle robusto discretos (ULO, 2006).

Referências

- ALEFELD, G.; HERZBERGER, J. *Introduction to Interval Computations*. [S.l.]: Academic Press, New York, NY, 1983. Citado 3 vezes nas páginas 20, 22 e 26.
- ALEFELD, G.; KREINOVICH, V.; MAYER, G. On the shape of the symmetric, persymmetric, and skew-symmetric solution set. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 18, n. 3, p. 693–705, 1997. Citado na página 38.
- ALEFELD, G.; KREINOVICH, V.; MAYER, G. On the solution sets of particular classes of linear interval systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 152, p. 1–15, 2003. Citado na página 38.
- BARD, J. F. *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications*. 1. ed. [S.l.]: Springer US, 1998. Citado na página 70.
- BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, p. 399–408, 1985. Citado na página 54.
- BARNETT, S. *Matrices: Methods and Applications*. [S.l.]: Oxford Applied Mathematics and Computing, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- BEECK, H. Zur problematik der hüllenbestimmung von intervallgleichungssystemen. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 29, p. 150–159, 1975. Citado na página 30.
- BENJOVENGO, F. P. *Alocação de Polos e Estabilidade Robustas de Sistemas Intercalares com Tratamento de Multiincidência de Parâmetros*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2006. Citado na página 38.
- BENTBIB, A. H. Solving the full rank interval least squares problem. *Applied Numerical Mathematics*, v. 41, p. 283–294, 2002. Citado na página 30.
- BHATTACHARYYA, S. P.; CHAPPELLAT, H.; KEEL, L. H. *Robust Control: The Parametric Approach*. [S.l.]: Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995. Citado na página 65.
- BINGULAC, S. P. An alternate approach to expanding $PA + A'P = -Q$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 15, p. 135–137, 1970. Citado 6 vezes nas páginas 14, 18, 50, 57, 58 e 80.
- BLONDEL, V. D.; TSITSIKLIS, J. N. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, v. 36, p. 1249–1274, 2000. Citado na página 31.
- BONATTI, I. S.; LOPES, A.; PERES, P. L. D.; AGULHARI, C. M. *Linearidade em Sinais e Sistemas*. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2015. Citado na página 60.
- BUSLOWICZ, M. Robust stability of positive continuous-time linear systems with delays. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, v. 20, n. 4, p. 665–670, 2010. Citado na página 38.

- CERONE, V.; PIGA, D.; REGRUTO, D. Characteristic polynomial assignment for plants with semialgebraic uncertainty: A robust diophantine equation approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, p. 2911–2921, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 10, 17, 64, 67, 71, 72, 73 e 74.
- CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design, 3rd. edition*. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., New York, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 16, 65 e 66.
- CHEN, X.; CHEN, M.; QI, W.; SHEN, J. Dynamic output-feedback control for continuous-time interval positive systems under l_1 performance. *Applied Mathematics and Computation*, v. 289, p. 48–59, 2016. Citado na página 17.
- COLSON, B.; MARCOTTE, P.; SAVARD, G. An overview of bilevel optimization. *Annals of Operations Research*, v. 153, n. 1, p. 235–256, 2007. Citado na página 70.
- COMBA, I. L. D.; STOLFI, J. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. *Anais do Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens*, Recife (Brasil), p. 9–18, 1993. Citado na página 16.
- DEMPE, S.; FRANKE, S. On the solution of convex bilevel optimization problems. *Computational Optimization and Applications*, v. 63, n. 3, p. 685–703, 2016. Citado na página 70.
- DEMPE, S.; KALASHNIKOV, V.; PEREZ-VALDES, G. A.; KALASHNYKOVA, N. *Bilevel Programming Problems: Theory, Algorithms and Applications to Energy Networks*. [S.l.]: Springer, 2015. Citado na página 70.
- EL-OWNY, H. B. M. A. New generalized interval arithmetic and its applications to structural mechanics and electrical circuits. *IJCSI International Journal of Computer Science Issues*, v. 11, p. 85–92, 2014. Citado na página 16.
- ELISHAKOFF, I.; OHSAKI, M. *Optimization and anti-optimization of structures under uncertainty*. [S.l.]: Imperial College Press, 2010. Citado na página 16.
- FAZZOLARI, H. A.; FERREIRA, P. A. V. Análise de estabilidade robusta para sistemas intervalares com tratamento de multi-incidências de parâmetros. *Anais do XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, Natal - RN, p. 1041–1046, 2015. Citado na página 52.
- FAZZOLARI, H. A.; FERREIRA, P. A. V. Control design of interval systems with multi incident model parameters. *Annals of IEEE XXIV International Congress on Electronics, Electrical Engineering and Computing - INTERCON 2017*, Cusco - Peru, 2017. Citado na página 33.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P.; CHILALI, M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, v. 41, p. 436–442, 1996. Citado na página 17.
- HANSEN, E. R. A generalized interval arithmetic. *Nicket K editor Interval Mathematics, Lect. Notes Comput Sc*, v. 29, p. 7–18, 1975. Citado na página 16.
- HARGREAVES, G. I. *Interval analysis in matlab*. 2002. Technical Report No. 416,416, Manchester Centre for Computational Mathematics. Citado na página 37.

- HLADÍK, M. Description of symmetric and skew-symmetric solution set. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 30, n. 2, p. 509–521, 2008. Citado na página 38.
- INUIGUCHI, M.; KUME, Y. Goal programming problems with interval coefficients and target intervals. *European Journal of Operational Research*, v. 52, p. 345–360, 1991. Citado na página 76.
- IWASAKI, T.; SHIBATA, G. LPV system analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, p. 1195–1208, 2001. Citado na página 55.
- JANSSON, C. Interval linear systems with symmetric matrices, skew-symmetric matrices and dependencies in the right hand side. *Computing*, v. 46, p. 265–274, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 40.
- JANSSON, C.; ROHN, J. An algorithm for checking regularity of interval matrices. *SIAM Journal on Mathematical Analysis and Applications*, v. 20, p. 756–776, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- JAULIN, L.; KIEFFER, M.; DIDRIT, O.; WALTER, E. *Applied Interval Analysis*. [S.l.]: Springer-Verlag, London, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 67.
- KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S. P. Robust stability and performance with fixed-order controllers. *Automatica*, v. 35, p. 1717–1724, 1999. Citado na página 76.
- KOLEV, L. V. A method for outer interval solution of linear parametric systems. *Reliable Computing*, v. 10, p. 227–239, 2004. Citado na página 38.
- KOLEV, L. V. Improvement of a direct method for outer solution of linear parametric systems. *Reliable Computing*, v. 12, p. 193–202, 2006. Citado na página 38.
- LENG, H.; ZHANG, Q. An iterative algorithm for the stability analysis of dynamic interval systems. *Applied Numerical Mathematics*, v. 69, p. 73–77, 2013. Citado na página 17.
- LIU, Z.; WANG, T.; LI, J. A trigonometric interval method for dynamic response analysis of uncertain nonlinear systems. *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*, 2015. Citado na página 16.
- LORDELO, A. D. S. *Análise e Projeto de Controladores Robustos por Alocação de Pólos via Análise Intervalar*. [S.l.]: Tese de doutorado - FEEC/UNICAMP, 2004. Citado na página 77.
- LORDELO, A. D. S.; FERREIRA, P. A. V. Analysis and design of robust controllers using the interval diophantine equation. *Reliable Computing*, v. 12, p. 371–388, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 65, 66, 76 e 77.
- MERLET, J.-P. Interval analysis for certified numerical solution of problems in robotics. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, v. 19, n. 3, p. 399–412, 2009. Citado na página 38.
- MOENS, D.; VANDEPITTE, D. A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Comput Methods Appl Mech Eng*, p. 1527–1555, 2005. Citado na página 16.

- MOORE, R. E. *Interval Analysis*. [S.l.]: Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.
- MOORE, R. E. *Methods and Applications of Interval Analysis*. [S.l.]: SIAM, Philadelphia, 1979. Citado na página 20.
- MOORE, R. E.; KCARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. *Introduction to Interval Analysis*. Philadelphia, PA: SIAM, 2009. Citado na página 16.
- MUHANNA, R. L.; MULLEN, R. L. Uncertainty in mechanics problems-interval-based approach. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 66, p. 127–557, 2001. Citado na página 16.
- NEUMAIER, A. *Interval Methods for Systems of Equations*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 16, 29, 31 e 37.
- NEUMAIER, A.; POWNUK, A. Linear systems with large uncertainties, with applications to truss structures. *Reliable Computing*, v. 13, p. 149–172, 2007. Citado na página 38.
- OETTLI, W. On the solution of a linear system with inaccurate coefficients. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 2, p. 115–118, 1965. Citado na página 28.
- OETTLI, W.; PRAGER, W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides. *Numerische Mathematik*, v. 6, p. 405–409, 1964. Citado na página 28.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and its Applications*, p. 209–228, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 18, 59 e 60.
- PEREIRA, L.; COSTA, V. da. Interval analysis applied to the maximum loading point of electric power systems considering load data uncertainties. *Electrical Power and Energy Systems*, v. 54, p. 334–340, 2014. Citado na página 16.
- POPOVA, E.; KRÄMER, W. Parametric fixed-point iteration implemented in C-XSC. *Preprint 2003/03, WRSWT, Universität Wuppertal*, p. 1–27, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 46.
- POPOVA, E.; KRÄMER, W. Inner and outer bounds for the solution set of parametric linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 199, p. 310–316, 2007. Citado na página 45.
- POPOVA, E. D. On the solution of parametrised linear systems. In: _____. *Scientific Computing Validated Numerics Interval Methods*. Kluwer, London: Springer Science & Business Media, 2001. p. 127–138. Citado na página 38.
- POPOVA, E. D. Quality of the solution sets of parameter-dependent interval linear systems. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, v. 82, n. 10, p. 723–727, 2002. Citado na página 38.
- POPOVA, E. D. Computer-assisted proofs in solving linear parametric problems. *Proceedings of the 12th GAMM/IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics*, Duisburg, Germany, 2006. Citado na página 38.

- POPOVA, E. D. Explicit characterization of a class of parametric solution sets. *Comptes Rendus de L'Academie Bulgare des Sciences*, v. 62, n. 10, p. 1207–1216, 2009. Citado na página 38.
- POPOVA, E. D.; KRÄMER, W. Visualizing parametric solution sets. *BIT Numerical Mathematics*, v. 48, p. 95–115, 2008. Citado na página 38.
- RAO, M. V. R.; REDDY, R. Fuzzy finite element analysis of structures with uncertainty in load and material properties. *Journal of Structural Engineering*, p. 129–137, 2006. Citado na página 16.
- ROHN, J. Systems of linear interval equations. *Linear Algebra and Applications*, v. 126, p. 39–78, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.
- ROHN, J. Positive definiteness and stability of interval matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 15, p. 175–184, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- ROHN, J. Forty necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices: A survey. *Electronic Journal of Linear Algebra*, p. 500–512, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 33.
- ROTSTEIN, H.; NA, R. S. P.; BANDONI, J.; DESAGES, A.; ROMAGNOLI, J. Robust characteristic polynomial assignment. *Automatica*, p. 711–715, 1991. Citado na página 16.
- RUMP, S. M. *Validated Solution of Large Linear Systems*. [S.l.]: Computing Supplementum 9, Springer-Verlag, 1993. 191–212 p. Citado na página 31.
- RUMP, S. M. *Verification methods for dense and sparse systems of equations*. [S.l.]: Topics in Validated Computations, J. Herzberger, Amsterdam, 1994. 63–135 p. Citado 11 vezes nas páginas 17, 18, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45 e 49.
- RUMP, S. M. Verification methods: rigorous results using floating-point arithmetic. *Acta Numerica*, v. 19, p. 287–449, 2010. Citado na página 16.
- RUMP, S. M. *INTLAB - INTerval LABoratory*. 2015. URL: <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 36 e 43.
- SADEGHZADEH, A. Identification and robust control for systems with ellipsoidal parametric uncertainty by convex optimization. *Asian Journal of Control*, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/asjc.437>>. Citado na página 17.
- SANTORO, R.; MUSCOLINO, G.; ELISHAKOFF, I. Optimization and anti-optimization solution of combined parameterized and improved interval analyses for structures with uncertainties. *Computers and Structures*, v. 149, p. 31–42, 2015. Citado na página 16.
- SEIF, N. P.; HUSSEIM, S. A.; DEIF, A. S. The interval sylvester equation. *Computing*, v. 52, p. 233–244, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 18, 48 e 49.
- SHARY, S. P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity. *Reliable Computings*, v. 8, p. 321–418, 2002. Citado na página 16.

- SKALNA, I. A method for outer interval solution of systems of linear equations depending linearly on interval parameters. *Reliable Computing*, v. 12, p. 107–120, 2006. Citado na página 38.
- SKALNA, I. On checking the monotonicity of parametric interval solution of linear structural systems. In: _____. *Parallel Processing and Applied Mathematics, Lecture Notes in Computer Science*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. p. 1400–1409. Citado na página 38.
- SOH, Y. C.; EVANS, R. J.; PETERSEN, I.; BETZ, R. E. Robust pole assignment. *Automatica*, v. 23, p. 601–610, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 76.
- SOLTANI, R.; SAFARI, J.; SADJADI, S. J. Robust series-parallel systems design under combined interval-ellipsoidal uncertainty sets. *Journal of Manufacturing Systems*, v. 37, p. 33–43, 2015. Citado na página 16.
- STOLFI, J.; FIGUEIREDO, L. H. de. An introduction to affine arithmetic. *TEMA - Trends in Applied and Computational Mathematics*, p. 297–312, 2003. Citado na página 16.
- ULO, N. Robust pole assignment via reflection coefficients of polynomials. *Automatica*, v. 42, p. 1223–1230, 2006. Citado na página 81.
- YAKOV, B. H.; ELISHAVOK, I. *Convex Models of Uncertainty*. [S.l.]: Elsevier, 2003. Citado na página 16.
- YANG, G.-H.; LUM, K.-Y. Comparisons among robust stability criteria for linear systems with affine parameter uncertainties. *Automatica*, v. 43, p. 491–498, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 56.